

Analisi Matematica 2 - 24/6/15 - Compito 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = \operatorname{Arctg}(xy + z^2 + 1) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

- (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i .

Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x > y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \log(e^x - e^y) ;$$

calcolare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy \, dx + x^2 \, dy .$$

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_{\Gamma} 2xy \, dx + x^2 \, dy ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$[(0, 0), (1, 1)] \cup [(1, 1), (2, 0)] \cup [(2, 0), (3, 1)] .$$

orientato in modo che $(0, 0)$ sia il punto iniziale e $(3, 1)$ il punto finale.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_S z \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3\} .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Data la funzione

$$f : \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{1}{2} \leq 3x + 2y + z \leq 1 \right\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x - y + z + 3 ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

7. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy, di funzione incognita $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = x \\ x(0) = 0, y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y = \cos x - \sin x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D y^2 \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (y + z) \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, \frac{x}{2} - y + z \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Exercice 1

a) Soit $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^3$

b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} y = \frac{y}{1 + (xy + z^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} x = \frac{x}{1 + (xy + z^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{1}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} 2z = \frac{2z}{1 + (xy + z^2 + 1)^2}$$

Soit le gradient

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{y}{1 + (xy + z^2 + 1)^2}, \frac{x}{1 + (xy + z^2 + 1)^2}, \frac{2z}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} \right)$$

c) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; on a

$$df(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (h_1, h_2, h_3) \rightarrow$$

$$\frac{y}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} h_1 + \frac{x}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} h_2 + \frac{2z}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} h_3$$

d) Soit

$$df(x, y, z) = \frac{y}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} dx + \frac{x}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} dy + \frac{2z}{1 + (xy + z^2 + 1)^2} dz$$

Exercice 2

Soit $(x, y) \in \text{dom}(f)$. Soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{e^x - e^y} e^x = \frac{e^x}{e^x - e^y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{e^x - e^y} (-e^y) = -\frac{e^y}{e^x - e^y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{e^x(e^x - e^y) - e^x e^x}{(e^x - e^y)^2} = -\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x \left(-\frac{-e^y}{(e^x - e^y)^2} \right) = \frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{e^y(e^x - e^y) + e^y e^y}{(e^x - e^y)^2} = -\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2}$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 =$$

$$\left(-\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2} \right) \left(-\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2} \right) - \left(\frac{e^x e^y}{(e^x - e^y)^2} \right)^2 =$$

$$\frac{e^{2x} e^{2y}}{(e^x - e^y)^4} - \frac{e^{2x} e^{2y}}{(e^x - e^y)^4} = 0$$

Esercizio 3

Si ha

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 y$$

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

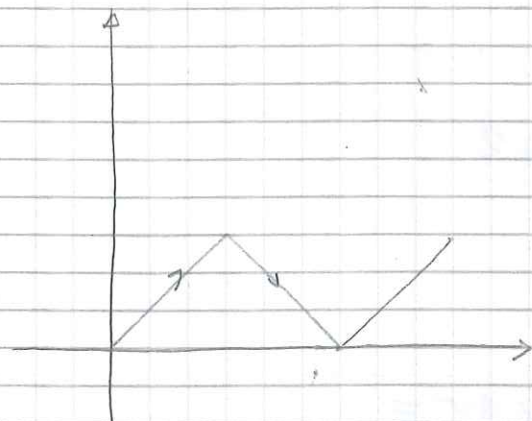
Quindi f è una primitiva della forma

differenziabile, quindi la forma differenziale è esatta.

L'insieme delle primitive della forma differenziale è

$$\{f + C; C \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4



Sia

$$\omega(x, y) = 2xy dx + x^2 dy$$

La forma differenziale ω è esatta e una primitiva di ω è la

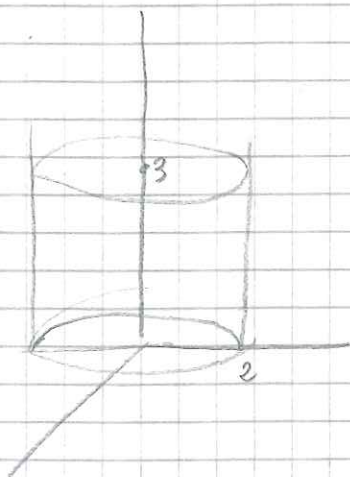
funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 y$$

Si ha quindi

$$\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = f(3, 1) - f(0, 0) = 9 \cdot 1 - 0 = 9$$

Esercizio 5



Una parametrizzazione in misure di S è la funzione φ

$$\begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \sin u \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 3]$$

Per ogni $(u, v) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -2 \sin u & 0 \\ 2 \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$E(u, v) = (-2 \sin u)^2 + (2 \cos u)^2 = 4$$

$$F(u, v) = 0$$

$$G(u, v) = 1$$

$$\sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v) - (F(u, v))^2} = \sqrt{4} = 2$$

Si ha quindi

$$\iint_S z \, ds = \iint_{[0, 2\pi] \times [0, 3]} v \cdot 2 \, du \, dv =$$

$$= 2 \left(\int_0^{2\pi} du \right) \cdot \left(\int_0^3 v \, dv \right) = 2 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_0^3 =$$

$$= 4\pi \cdot \frac{9}{2} = 18\pi$$

Esercizio 6

a) Si ha

$$3x + 2y + z = 1$$

ne solo se

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + z = 1$$

Quindi il piano $3x + 2y + z = 1$ incontra gli assi x, y, z , rispettivamente nei punti di coordinate rispetto agli assi: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$.

Si ha

$$3x + 2y + z = \frac{1}{2}$$

se e solo se

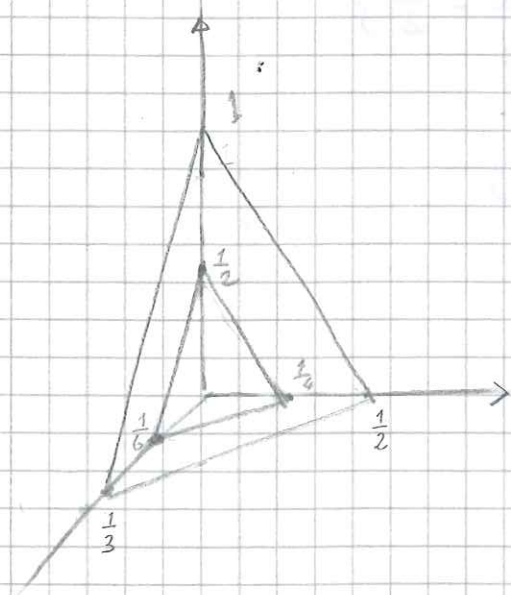
$$\frac{x}{\frac{1}{6}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1$$

Quindi il piano $3x + 2y + z = \frac{1}{2}$ incontra gli assi x, y, z rispettivamente nei punti di coordinate rispetto agli assi: $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

D è la regione di spazio del primo ottante "compresa" fra i due piani paralleli.

$$3x + 2y + z = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$3x + 2y + z = 1$$



Essendo D compatta ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

Se $(x, y, z) \in D^0$; allora $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 \neq 0$

Si ha quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Si ha

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x + 2y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x + 2y + z = -\frac{1}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0, x > 0, y > 0, \frac{1}{2} < 3x + 2y < 1\}$$

$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, x > 0, z > 0, \frac{1}{2} < 3x + z < 1\}$$

$$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y > 0, z > 0, \frac{1}{2} < 2y + z < 1\}$$

$$F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x > 0, y > 0, 3x + 2y = 1\}$$

$$F_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, x > 0, z > 0, 3x + z = 1\}$$

$$F_8 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y > 0, z > 0, 2y + z = 1\}$$

$$F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, x > 0, y > 0, 3x + 2y = \frac{1}{2}\}$$

$$F_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, x > 0, z > 0, 3x + z = \frac{1}{2}\}$$

$$F_{11} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y > 0, z > 0, 2y + z = \frac{1}{2}\}$$

$$F_{12} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, z = 0, \frac{1}{6} < x < \frac{1}{3}\}$$

$$F_{13} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, z = 0, \frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}\}$$

$$F_{14} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y = 0, \frac{1}{2} < z < 1\}$$

$$F_{15} = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right) \right\}$$

$$F_{16} = \left\{ \left(\frac{1}{6}, 0, 0 \right) \right\}$$

$$F_{17} = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$$

$$F_{18} = \left\{ \left(0, \frac{1}{4}, 0 \right) \right\}$$

$$F_{19} = \{(0, 0, 1)\}$$

$$F_{20} = \left\{ \left(0, 0, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Si ha

$$F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9 \cup F_{10} \cup F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14} \cup F_{15} \cup F_{16} \cup F_{17} \cup F_{18} \cup F_{19} \cup F_{20}$$

Sia

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow 3x + 2y + z - 1$$

F_1 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ differenziale di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x - y + z + 3$$

Sia $(x, y, z) \in F_1 \cap E$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

ovv. tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (3, 2, 1)$$

che $1 = 3\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo; non è quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow 3x + 2y + z - \frac{1}{2}$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_2$. Per il teorema sui

moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che
 $\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$
cioè tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (3, 2, 1)$$

Si ha $1 = 3\lambda$ e $-1 = 2\lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = -\frac{1}{2}$; ciò è assurdo

Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Si ha ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, \frac{1}{2} < 3x + 2y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow z.$$

F_3 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ differenziale di dimensione 2
di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Si ha $(x, y, z) \in E \cap F_3$. Per il teorema dei moltiplicatori
di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (0, 0, 1)$$

Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo si ha quindi

$$E \cap F_3 = \emptyset$$

Si ha ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0, \frac{1}{2} < 3x + z < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow y$$

F_4 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2
di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Si ha $(x, y, z) \in E \cap F_4$. Per il teorema sui moltiplicatori
di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

così tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (0, 1, 0)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_4 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0, z > 0, \frac{1}{2} < 2y + z < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x$$

F_5 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_5$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

così tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (1, 0, 0)$$

Si ha $-1=0$; ciò è assurdo; si ha quindi

$$E \cap F_5 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (3x + 2y - 1, z)$$

F_6 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_6$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

così tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (3, 2, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

$$\text{Si ha } 1 = 3\lambda \text{ e } -1 = 2\lambda; \text{ quindi } \lambda = \frac{1}{3} \text{ e } \lambda = -\frac{1}{2}$$

ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_6 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (3x + z - 1, y)$$

F_7 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_7$. Per il teorema sui moltiplicatori

di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (3, 0, 1) + \mu (0, 1, 0)$$

Si ha $1 = 3\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo

Si ha quindi

$$E \cap F_7 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (2y + z - 1, x)$$

F_8 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_8$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, -1, 1) = \lambda (0, 2, 1) + \mu (1, 0, 0)$$

Si ha $-1 = 2\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_8 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (3x + 2y - \frac{1}{2}, z)$$

F_9 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_9$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z),$$

cioè tali che

$$(1, -1, 1) = \lambda(3, 2, 0) + \mu(0, 0, 1)$$

Sicché $1 = 3\lambda$ e $-1 = 2\lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = -\frac{1}{2}$; ciò è assurdo. Sicché quindi

$$E \cap F_9 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (3x + z - \frac{1}{2}, y)$$

F_{10} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$, di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_{10}$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda(3, 0, 1) + \mu(0, 1, 0)$$

Sicché $1 = 3\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = \frac{1}{3}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo.

Sicché quindi

$$E \cap F_{10} = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x + z - \frac{1}{2}, x)$$

F_{11} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_{11}$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, -1, 1) = \lambda (0, 2, 1) + \mu (1, 0, 0)$$

Sicché $-1 = 2\lambda$ e $1 = \lambda$; quindi $\lambda = -\frac{1}{2}$ e $\lambda = 1$; ciò è assurdo. Sicché quindi

$$E \cap F_{11} = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{6} < x < \frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, z)$$

F_{12} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_{12}$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z),$$

cioè tali che

$$(1, -1, 1) = \lambda (0, 1, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Sicché $1 = 0$; ciò è assurdo. Sicché quindi

$$E \cap F_{12} = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, z)$$

F_{13} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_{13}$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, -1, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1)$$

Si ha $-1 = 0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_{13} = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \frac{1}{2} < z < 1\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x, y)$$

F_{14} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y, z) = 0$.

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_{14}$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, -1, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$$

Si ha $1 = 0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_{14} = \emptyset$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right), \left(\frac{1}{6}, 0, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{4}, 0 \right), (0, 0, 1), \left(0, 0, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right) = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{6}, 0, 0\right) = \frac{1}{6}$$

$$f(0, \frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2}$$

$$f(0, \frac{1}{4}, 0) = -\frac{1}{4}$$

$$f(0, 0, 1) = 1$$

$$f(0, 0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Si ha quindi $\max(f) = 1$, $\min(f) = -\frac{1}{2}$

Esercizio 7

Si ha

$$x(t) = t + C_1 \quad \text{con } C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t) = t + C_1$$

Quindi

$$y(t) = \frac{1}{2} t^2 + C_1 t + C_2, \quad \text{con } C_2 \in \mathbb{R}$$

L'integrale generale del sistema è quindi

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + t \\ y(t) = C_1 t + C_2 + \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$C_1 = 0, C_2 = 0 \Rightarrow$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, \frac{1}{2} t^2)$$

Esercizio 8

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = \pm 2i$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos(2x), \quad \varphi_2(x) = \sin(2x)$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = A \cos x + B \sin x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = -A \sin x + B \cos x$$

$$\psi''(x) = -A \cos x - B \sin x$$

La funzione $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-A \cos x - B \sin x + 4(A \cos x + B \sin x) = \cos x - \sin x$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} 3A = 1 \\ 3B = -1 \end{cases}$$

$$\text{cioè } A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$

Si ha quindi

$$y(x) = \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin x$$

l'intero integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin x$$

Si ha

$$y'(x) = -2C_1 \sin(2x) + 2C_2 \cos(2x) - \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{3} \cos x$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

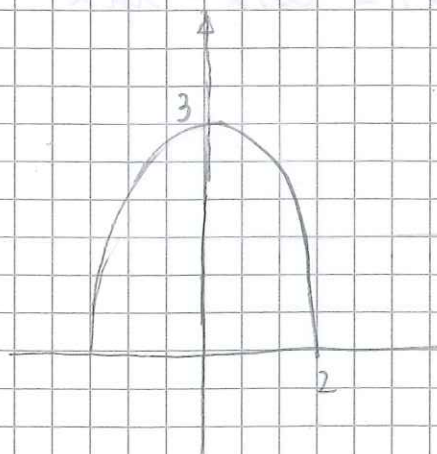
$$\begin{cases} C_1 + \frac{1}{3} = 0 \\ 2C_2 - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

La soluzione se esiste è $C_1 = -\frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{1}{6}$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -\frac{1}{3} \cos(2x) + \frac{1}{6} \sin(2x) + \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin x$$

Esercizio 9



Una parametrizzazione in misure di θ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = 2\theta \cos \theta \\ y = 3\theta \sin \theta \end{cases} \quad (\theta, t) \in [0, 1] \times [0, \pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = 6\rho$
 Si ha quindi

$$\iint_D y^2 dx dy = \iint_{[0,1] \times [0,\pi]} (3\rho \sin t)^2 \cdot 6\rho d\rho dt =$$

$$= 54 \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin^2 t dt \right) =$$

$$= 54 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt =$$

$$= 54 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^\pi = \frac{27}{4} \pi$$

Esercizio 10 (1° modo)

Si ha

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \leq 0, -\frac{x}{2} - y \leq 1 \right\}$$

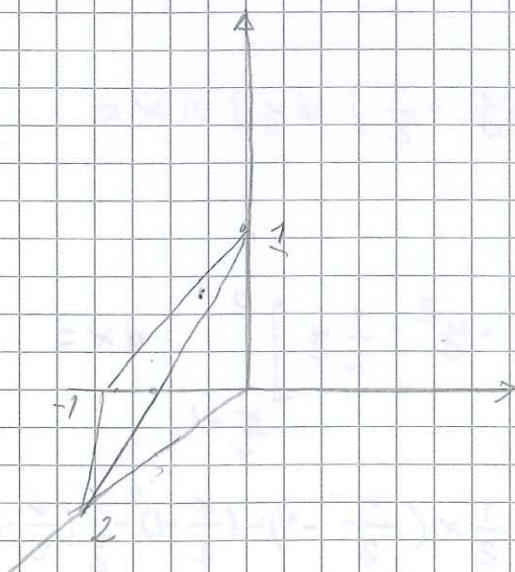
Si ha $P_{1,2}(D) = T$ e per ogni
 $(x, y) \in T$ si ha

$$D(x, y) = \left[0, 1 - \frac{x}{2} + y \right]$$

Si ha quindi

$$\iiint_D (y+z) dx dy dz = \iint_T \left(\int_0^{1 - \frac{x}{2} + y} (y+z) dz \right) dx dy =$$

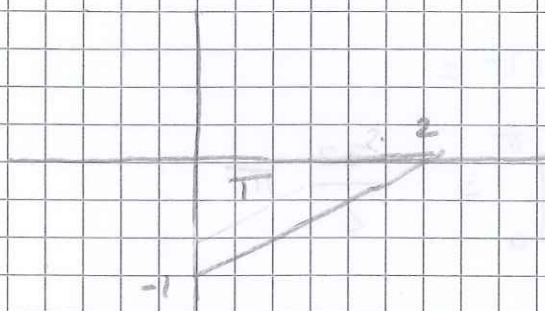
$$= \iint_T \left[yz + \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{1 - \frac{x}{2} + y} dx dy =$$



$$= \iint_T \left(y \left(1 - \frac{x}{2} + y \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + y \right)^2 \right) dx dy =$$

$$= \iint_T \left(y - \frac{1}{2} xy + y^2 + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x + y - \frac{1}{2} xy \right) dx dy =$$

$$= \iint_T \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3}{2} y^2 - xy - \frac{1}{2} x + 2y + \frac{1}{2} \right) dx dy$$



So che $p_1(T) = [0, 2]$ e

per ogni $x \in [0, 2]$ si ha

$$T(x) = \left[\frac{x}{2} - 1, 0 \right]$$

L'integrale sopra T quindi

uguale a

$$\int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}-1}^0 \left(\frac{x^2}{8} + \frac{3}{2} y^2 - xy - \frac{1}{2} x + 2y + \frac{1}{2} \right) dy \right) dx =$$

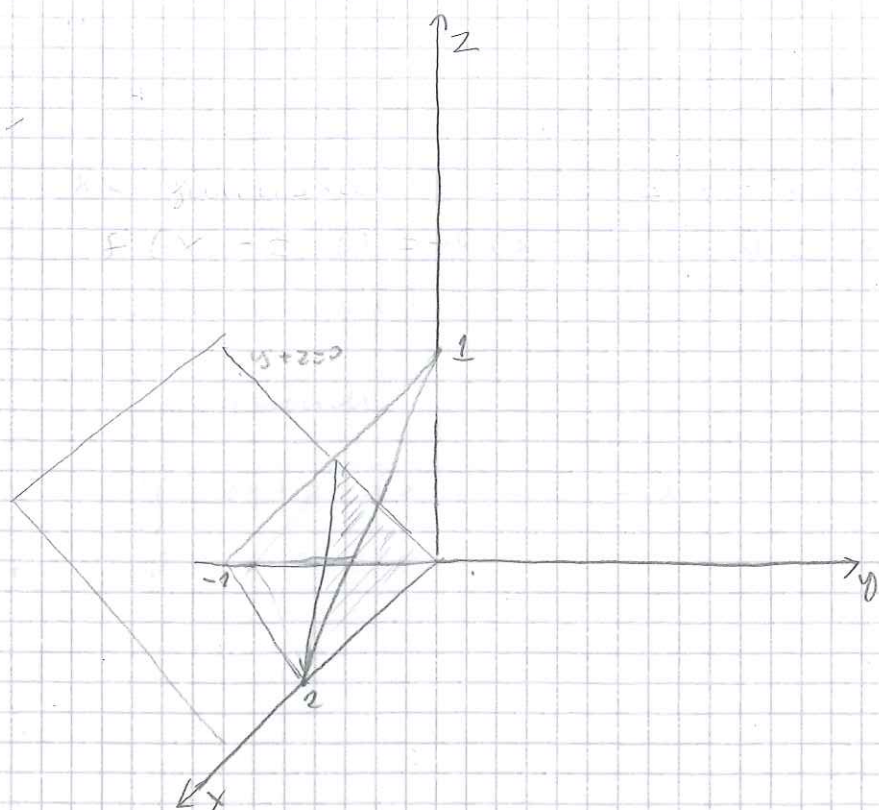
$$= \int_0^2 \left[\frac{x^2}{8} y + \frac{1}{2} y^3 - \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{2} xy + y^2 + \frac{1}{2} y \right]_{\frac{x}{2}-1}^0 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{8} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 1 \right)^3 + \frac{1}{2} x \left(\frac{x}{2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} x \left(\frac{x}{2} - 1 \right) - \left(\frac{x}{2} - 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{16} x^3 + \frac{x^2}{8} - \frac{1}{16} x^3 + \frac{3}{8} x^2 - \frac{3}{4} x + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{x^2}{4} + x - 1 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 0 dx = 0$$

Esercizio 10 (2 moduli)



Consideriamo la
simmetria
rispetto al piano
 $y+z=0$, cioè
rispetto al piano
determinato
dall'asse x e
dalla retta
 $y+z=0$ del piano
 yz .

Tale simmetria
è la funzione

$$s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x, -z, -y)$$

D è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(2,0,0)$, $(1,0,0)$ e
 $(0,-1,0)$.

I punti $(0,0,0)$ e $(2,0,0)$ vengono mappati da D in
se stessi; anche poi $s(0,0,1) = (0,-1,0)$ e
 $s(0,-1,0) = (0,1,0)$

Si ha dunque $s(D) = D$; D è quindi simmetrico
rispetto al piano $y+z=0$

La funzione da integrare è $f(x,y,z) = y+z$

Consideriamo due punti (x,y,z) e (x',y',z') di D
simmetrici rispetto al piano $y+z=0$

$$\text{Si ha } (x',y',z') = (x,-z,-y)$$

$$\begin{aligned} \text{Si ha } f(x,y,z) &= y+z, & f(x',y',z') &= f(x,-z,-y) \\ &= -y-z \end{aligned}$$

quindi f assume in punti simmetrici valori opposti.

Si ha quindi

$$\iiint_D (y+z) dx dy dz = 0$$

D