

Analisi Matematica 2 - 13/7/'15 - Compito 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : . . .

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = \left(\sqrt{2 + \sin \frac{x}{y}}, \operatorname{sh} y^x \right) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
(b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
(c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \neq 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^5 \sin \frac{y^2 + z^2}{x^2} ;$$

per $(x, y, z) \in \operatorname{dom}(f)$, calcolare

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) ;$$

si dimostri che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = kf(x, y, z) ;$$

si determini tale k .

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S z \, dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, x \geq 0, \, y \leq 0, \, z \geq 0, \, x - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1\}$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{\gamma} y^2 \, ds ,$$

dove

$$\gamma = [(0, 0), (1, 1)] \cup [(1, 1), (2, 0)] \cup [(2, 0), (3, 1)] .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, \, (x, y) \longrightarrow 3x + 5y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos(3x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D \sqrt{1 + (x + 2y)^2 + 2(x - y)^2} \, dx dy ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; \, x^2 + 2y^2 \leq \frac{1}{3} \right\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (x - y + 3z) \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, x^2 + y^2 \leq (2 - z)^2, \, 0 \leq z \leq 1 \} .$$

Suggerimento. Si trasformi l'integrale in uno più semplice usando le simmetrie.

Svolgimento e risposta.