

Analisi Matematica 2 - 13/7/'15 - Compito 3

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = \left(\sqrt{2 + \sin \frac{x}{y}}, \operatorname{sh} y^x \right) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 3) Sia

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \neq 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^5 \sin \frac{y^2 + z^2}{x^2} ;$$

per $(x, y, z) \in \operatorname{dom}(f)$, calcolare

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) ;$$

si dimostri che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = k f(x, y, z) ;$$

si determini tale k .

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int \int_S z \, dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0, x - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1\}$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{\gamma} y^2 \, ds ,$$

dove

$$\gamma = [(0, 0), (1, 1)] \cup [(1, 1), (2, 0)] \cup [(2, 0), (3, 1)] .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 3x + 5y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos(3x) \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D \sqrt{1 + (x + 2y)^2 + 2(x - y)^2} \, dx dy ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; \, x^2 + 2y^2 \leq \frac{1}{3} \right\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (x - y + 3z) \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, x^2 + y^2 \leq (2 - z)^2, \, 0 \leq z \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

b) Per ogni $(x, y) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}} \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ch } y^x \cdot y^x \log y \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2y} \cos\frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}}, y^x \text{ch } y^x \log y \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}} \cos\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right), \text{ch } y^x \times y^{x-1} \right)$$

$$= \left(-\frac{x}{2y^2} \cos\frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}}, x y^{x-1} \text{ch } y^x \right)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2y} \cos\frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}} & -\frac{x}{2y^2} \cos\frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}} \\ y^x \text{ch } y^x \log y & x y^{x-1} \text{ch } y^x \end{pmatrix}$$

c) Per ogni $(x, y) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$f'(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2y} \cos\frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}} h_1 - \frac{x}{2y^2} \cos\frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{2+\sin\frac{x}{y}}} h_2, \right.$$

$$\left. y^x \text{ch } y^x (\log y) h_1 + x y^{x-1} \text{ch } y^x h_2 \right)$$

Übung 2

Sei $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$

Sei

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 5x^4 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} + x^5 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} (y^2+z^2) \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \\ &= 5x^4 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} - 2x^2 (y^2+z^2) \cos \frac{y^2+z^2}{x^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^5 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} \frac{2y}{x^2} = 2x^3 y \cos \frac{y^2+z^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x^5 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} \frac{2z}{x^2} = 2x^3 z \cos \frac{y^2+z^2}{x^2}$$

Sei die quadri

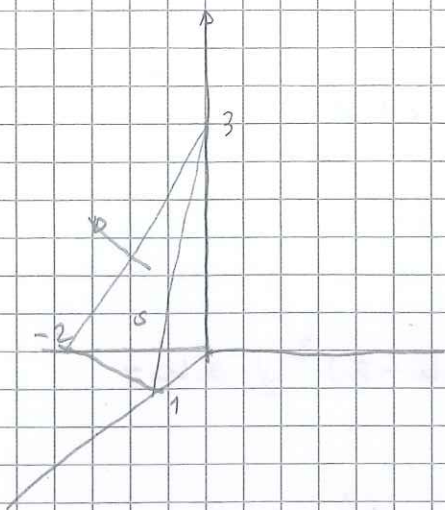
$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}& 5x^5 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} - 2x^3 (y^2+z^2) \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} + \\ & 2x^3 y^2 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} + 2x^3 z^2 \cos \frac{y^2+z^2}{x^2} =\end{aligned}$$

$$= 5x^5 \sin \frac{y^2+z^2}{x^2} = 5f(x, y, z)$$

Sei die quadri $K=5$

Esercizio 3



Si ha

$$T = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 ; u \geq 0, v \leq 0, u - \frac{v}{2} \leq 1 \right\}$$

Una parametrizzazione in
misura di S non orientata è
la funzione φ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3 - 3u + \frac{3}{2}v \end{cases} \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$; quindi φ è concorde con
l'orientazione di S

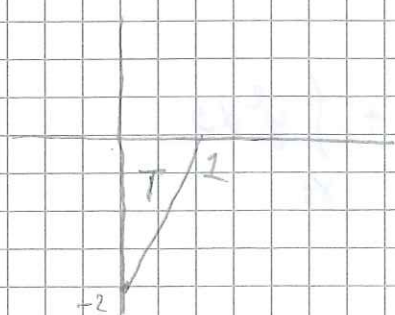
Si ha quindi

$$\iint_S z \, dy \wedge dz = \iint_T \left(3 - 3u + \frac{3}{2}v \right) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} du dv =$$

$$= \iint_T \left(3 - 3u + \frac{3}{2}v \right) 3 \, du dv = 9 \iint_T \left(1 - u + \frac{1}{2}v \right) du dv$$

Si ha $p_1(T) = [0, 1]$ e

$$\forall u \in [0, 1] \text{ si ha } \tau(u) = [2u - 2, 0]$$

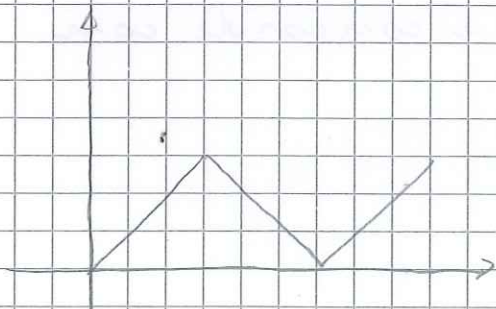


4

3. he quadri

$$\begin{aligned}
 9 \iint_T \left(1 - u + \frac{1}{2}v\right) du dv &= 9 \int_0^1 \left(\int_{2u-2}^0 \left(1 - u + \frac{1}{2}v\right) dv \right) du = \\
 &= 9 \int_0^1 \left[v - uv + \frac{1}{4}v^2 \right]_{2u-2}^0 du = \\
 &= 9 \int_0^1 \left(-(2u-2) + u(2u-2) - \frac{1}{4}(2u-2)^2 \right) du = \\
 &= 9 \int_0^1 (-2u + 2 + 2u^2 - 2u - u^2 + 2u - 1) du = \\
 &= 9 \int_0^1 (u^2 - 2u + 1) du = \\
 &= 9 \left[\frac{1}{3}u^3 - u^2 + u \right]_0^1 = 9 \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3
 \end{aligned}$$

Esercizio 4



3.2

$$\gamma_1 = [(0,0), (1,1)]$$

$$\gamma_2 = [(1,1), (2,0)]$$

$$\gamma_3 = [(2,0), (3,1)]$$

$$3. \text{ he } \int_{\gamma} y^2 ds = \int_{\gamma_1} y^2 ds + \int_{\gamma_2} y^2 ds + \int_{\gamma_3} y^2 ds$$

3 punti di γ_1 sono dati da

$$(x, y) = (0, 0) + t((1, 1) - (0, 0))$$

al variare di t in $[0, 1]$

Una parametrizzazione di γ_1 è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $\varphi'(t) = (1, 1)$; quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$

Si ha quindi

$$\int_{\gamma_1} y^2 ds = \int_0^1 t^2 \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3 punti di γ_2 sono dati da

$$(x, y) = (1, 1) + t((2, 0) - (1, 1))$$

al variare di t in $[0, 1]$

Una parametrizzazione di γ_2 è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Per ogni $t \in [0, 1]$ si ha $\varphi'(t) = (1, -1)$; quindi $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{2}$

Si ha quindi

$$\int_{\gamma_2} y^2 ds = \int_0^1 (1-t)^2 \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left[-\frac{1}{3} (1-t)^3 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

3 punti di γ_3 sono dati da

$$(x, y) = (2, 0) + t((3, 1) - (2, 0))$$

al variare di t in $[0, 1]$.

Una parametrizzazione di γ_3 è quindi la funzione σ

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

Per ogni $t \in [0,1]$ si ha $\sigma'(t) = (1,1)$; quindi $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$

Si ha quindi:

$$\int_{\gamma_3} y^2 ds = \int_0^1 t^2 \sqrt{2} ds = \sqrt{2} \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Si ha quindi:

$$\int_{\gamma} y^2 ds = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

Esercizio 5

a) Sia $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti assoluti di f .

Sia $(x,y) \in D^0$; si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 \neq 0$

Si ha quindi:

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 1-x^2, x \in]-1,1[\}$$

$$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2-1, x \in]-1,1[\}$$

$$F_3 = \{(1,0)\}$$

$$F_4 = \{(-1,0)\}$$

Si ha

$$F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

$$\text{Sia } g: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 + y - 1$$

F_1 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ differenziale di dimensione 1 di equazione costante $g(x, y) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow 3x + 5y$$

Sia $(x, y) \in E \cap F_1$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

cioè tale che

$$(3, 5) = \lambda (2x, 1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 5 = \lambda \\ y = 1 - x^2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Si ha } 3 = 10x; \text{ quindi } x = \frac{3}{10}; \text{ e } y = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$$

Si trova il punto $(\frac{3}{10}, \frac{91}{100})$. Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{3}{10}, \frac{91}{100} \right) \right\}$$

Sia ora

$$g: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 - y - 1$$

F_2 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ differenziale di dimensione 1 di equazione costante $g(x, y) = 0$

Sia $(x, y) \in E \cap F_2$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \lambda \operatorname{grad} g(x, y)$$

ovvero tale che

$$(3, 5) = \lambda (2x, -1)$$

Sicché quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 5 = -\lambda \\ y = x^2 - 1 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

Sicché $3 = -10x$; quindi $x = -\frac{3}{10}$; anche $y = \frac{9}{100} - 1 = -\frac{91}{100}$

Sicché trova il punto $(-\frac{3}{10}, -\frac{91}{100})$

Sicché quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(-\frac{3}{10}, -\frac{91}{100} \right) \right\}$$

Sicché quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{3}{10}, \frac{91}{100} \right), \left(-\frac{3}{10}, -\frac{91}{100} \right), (1, 0), (-1, 0) \right\}$$

Sicché

$$f\left(\frac{3}{10}, \frac{91}{100}\right) = \frac{109}{20}$$

$$f\left(-\frac{3}{10}, -\frac{91}{100}\right) = -\frac{109}{20}$$

$$f(1, 0) = 3$$

$$f(-1, 0) = -3$$

Sicché $3 < \frac{109}{20}$; Sicché quindi

$$\max(f) = \frac{109}{20}, \quad \min(f) = -\frac{109}{20}$$

Esercizio 6

Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili assegnata per $x \in \mathbb{R}$ e per $y > -1$

Il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{1+y}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, y > -1$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sqrt{1+y} y' = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, y > -1$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in \text{dom}(y)$

$$\int_0^y \sqrt{1+t} dt = \int_0^x dt, \quad x \in \mathbb{R}, y > -1$$

cioè

$$\left[\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^y = x, \quad x \in \mathbb{R}, y > -1$$

cioè

$$(1+y)^{\frac{3}{2}} - 1 = \frac{3}{2} x, \quad x \in \mathbb{R}, y > -1$$

cioè

$$(1+y)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, y > -1$$

Si ha $\frac{3}{2} x + 1 > 0$; quindi $x > -\frac{2}{3}$

L'equazione implicita sopra è equivalente all'equa-

zione implicita

$$(y+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}x + 1, \quad x > -\frac{2}{3}, \quad y > -1$$

quindi a

$$y+1 = \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^{\frac{2}{3}}, \quad x > -\frac{2}{3}, \quad y > -1$$

quindi a

$$y = \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^{\frac{2}{3}} - 1, \quad x > -\frac{2}{3}, \quad y > -1$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi:]-\frac{2}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{3}{2}x + 1\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

Esercizio 7

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = \pm 3i$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = \cos(3x), \quad \varphi_2(x) = \sin(3x)$$

Essendo 3i soluzioni dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x(A \cos(3x) + B \sin(3x))$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$y'(x) = A \cos(3x) - 3Ax \sin(3x) + B \sin(3x) + 3Bx \cos(3x)$$

$$y''(x) = -3A \sin(3x) - 3A \sin(3x) - 9Ax \cos(3x) + 3B \cos(3x) + 3B \cos(3x) - 9Bx \sin(3x) =$$

$$-6A \sin(3x) - 9Ax \cos(3x) + 6B \cos(3x) - 9Bx \sin(3x)$$

Se funzione $y(x)$ è quindi soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-6A \sin(3x) - 9Ax \cos(3x) + 6B \cos(3x) - 9Bx \sin(3x) + 9Ax \cos(3x) + 9Bx \sin(3x) = \cos(3x)$$

quindi se e solo se

$$-6A \sin(3x) + 6B \cos(3x) = \cos(3x);$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} -6A = 0 \\ 6B = 1 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$y(x) = \frac{1}{6} x \sin(3x)$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + \frac{1}{6} x \sin(3x)$$

Si ha

$$y'(x) = -3C_1 \sin(3x) + 3C_2 \cos(3x) + \frac{1}{6} \sin(3x) + \frac{1}{2} x \cos(3x)$$

Se funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 3C_2 = 0 \end{cases} \text{ cioè } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Beuking è quindi:

$$\varphi(x) = \frac{1}{6} x \sin(3x)$$

Esercizio 8

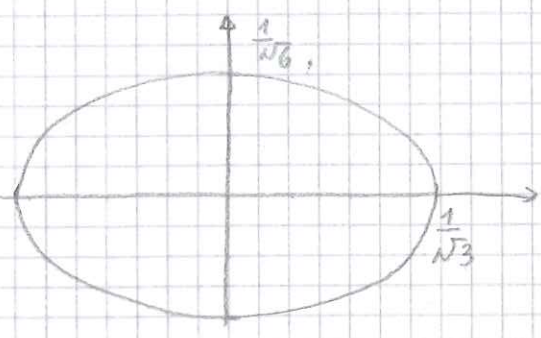
Sia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha:

$$x^2 + 2y^2 \leq \frac{1}{3} \quad \text{se e solo se}$$

$$3x^2 + 6y^2 \leq 1, \quad \text{cioè se e solo se}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} \leq 1$$

D è quindi il dominio limitato dall'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiasse $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{6}}$



Una parametrizzazione in misure di D è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \rho \cos t \\ y = \frac{1}{\sqrt{6}} \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ si ha

$$|\det \varphi'(\rho, t)| = \frac{1}{\sqrt{18}} \rho = \frac{1}{3\sqrt{2}} \rho$$

Si ha quindi:

$$\iint_D \sqrt{1 + (x+2y)^2 + 2(x-y)^2} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \rho \cos t + \frac{2}{\sqrt{6}} \rho \sin t\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \rho \cos t - \frac{1}{\sqrt{6}} \rho \sin t\right)^2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2}} \rho \, d\rho \, dt =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sqrt{1 + \frac{1}{3}s^2 \cos^2 t + \frac{4}{\sqrt{18}}s^2 \cos t \sin t + \frac{2}{3}s^2 \sin^2 t + \frac{2}{3}s^2 \cos^2 t - \frac{4}{\sqrt{18}}s^2 \cos t \sin t + \frac{1}{3}s^2 \sin^2 t} s ds dt =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sqrt{1 + s^2 \cos^2 t + s^2 \sin^2 t} s ds dt =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \sqrt{1 + s^2} s ds dt =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{1+s^2} s ds \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+s^2} (2s) ds =$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \left[\frac{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{9} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{4}{9}\pi - \frac{\sqrt{2}}{9}\pi =$$

$$= \frac{(4 - \sqrt{2})\pi}{9}$$

Esercizio 9

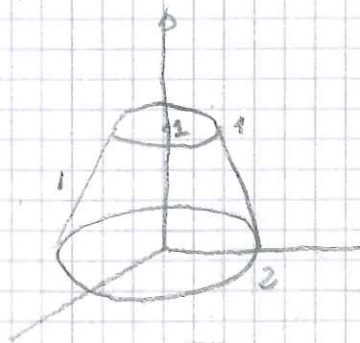
Si ha

$$\iiint_D (x - y + 3z) dx dy dz =$$

$$\iiint_D x dx dy dz - \iiint_D y dx dy dz + 3 \iiint_D z dx dy dz$$

Per la simmetria rispetto al piano yz si ha

$$\iiint_D x dx dy dz = 0$$



Per la simmetria rispetto al piano xz si ha

$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz = 0$$

Si ha quindi

$$\iiint_D (x - y + 3z) \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$$

Si ha $P_3(0) = [0, 1]$ e per ogni $z \in (0, 1]$ si ha

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq (2-z)^2\}$$

Si ha quindi

$$3 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = 3 \int_0^1 \left(\iint_{D(z)} z \, dx \, dy \right) dz =$$

$$= 3 \int_0^1 z \left(\iint_{D(z)} dx \, dy \right) dz = 3 \int_0^1 z \, \text{ms}(D(z)) \, dz =$$

$$= 3 \int_0^1 z \pi (2-z)^2 \, dz =$$

$$= 3\pi \int_0^1 z (4 - 4z + z^2) \, dz =$$

$$= 3\pi \int_0^1 (4z - 4z^2 + z^3) \, dz =$$

$$= 3\pi \left[2z^2 - \frac{4}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^4 \right]_0^1 =$$

$$= 3\pi \left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} \right) = 3\pi \frac{24 - 16 + 3}{12} = 3\pi \frac{11}{12} = \frac{11}{4} \pi$$