

Analisi Matematica 2 - 8/9/'15

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (x^{\sin y}, y^{\sin x}) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Risposta.

2. (p. 4) Sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow x^2 + 6xy - z^3 ;$$

sia V la sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2,

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; 3x^2 + 6xy^2 - z^3 = 1\} ;$$

- (a) determinare lo spazio normale a V in $(1, -1, 2)$;
- (b) determinare il versore normale a V in $(1, -1, 2)$ ν tale che $\nu_3 > 0$;
- (c) calcolare $D_\nu f(1, -1, 2)$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di funzioni:

$$\int \int_S (x^2 + y^2) \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 2) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali:

$$\int_{\Gamma} y \, dx + x \, dy ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, y \geq 1\} ,$$

orientato in modo tale che $(2, 1)$ sia il punto iniziale e $(0, 1)$ il punto finale.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow xz - y^2 ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 y + 2x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^x \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x^2 \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq y \leq 5 - x^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (x^2 + y^2) \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$

b) Per ogni $(x, y) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\sin y \cdot x^{\sin y - 1}, y^{\sin x} \log y \cos x \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(x^{\sin y} \log x \cos y, \sin x \cdot y^{\sin x - 1} \right)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \sin y \cdot x^{\sin y - 1} & x^{\sin y} \log x \cos y \\ y^{\sin x} \log y \cos x & \sin x \cdot y^{\sin x - 1} \end{pmatrix}$$

c) Si ha

$$f'(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \rightarrow \left(\sin y \cdot x^{\sin y - 1} h_1 + x^{\sin y} \log x \cos y h_2, y^{\sin x} \log y \cos x h_1 + \sin x \cdot y^{\sin x - 1} h_2 \right)$$

Esercizio 2

a) Sia

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow 3x^2 + 6xy^2 - z^3 - 1$$

V è la sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ differenziale di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\text{grad } g(x, y, z) = (6x + 6y^2, 12xy, -3z^2)$$

Si ha quindi

$$\text{grad } g(1, -1, 2) = (12, -12, -12)$$

$(12, -12, -12)$ è una base di $N_{(1, -1, 2)}(V)$.

2

Un'altra base è $(1, -1, -1)$

Si ha quindi:

$$N_{(1,-1,-1)}(V) = \{ t(1, -1, -1); t \in \mathbb{R} \}$$

b) Si ha $\|(1, -1, -1)\| = \sqrt{3}$

y vettori normali a V in $(-1, 1, 2)$ sono quindi:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, -1) = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Si ha quindi:

$$V = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

c) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -3z^2$$

Si ha quindi:

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2x + 6y, 6x, -3z^2)$$

Si ha quindi:

$$\text{grad } f(1, -1, 2) = (-4, 6, -12)$$

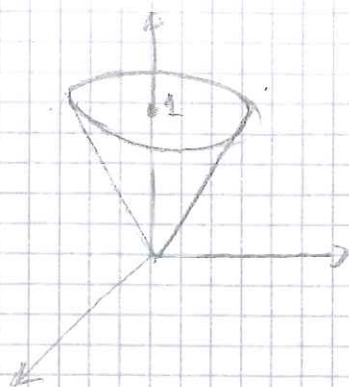
Si ha quindi:

$$df(1, -1, 2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (h_1, h_2, h_3) \mapsto -4h_1 + 6h_2 - 12h_3$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(1, -1, 2) &= df(1, -1, 2)(\vec{v}) = -4 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + 6 \frac{1}{\sqrt{3}} - 12 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (4 + 6 - 12) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Esercizio 3



I punti di S sono dati da
 $(x, y, z) = (0, 0, 0) + t((\cos \theta, \sin \theta, 1) - (0, 0, 0))$

al variare di t in $[0, 1]$ e di θ in $[0, 2\pi]$

Una parametrizzazione in misure di S è quindi data dalla funzione φ

$$\begin{cases} x = t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \\ z = t \end{cases} \quad (t, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(t, \theta) \in \text{dom } \varphi$ si ha

$$\varphi'(t, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -t \sin \theta \\ \sin \theta & t \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$E(t, \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$F(t, \theta) = 0$$

$$G(t, \theta) = t^2 \sin^2 \theta + t^2 \cos^2 \theta = t^2$$

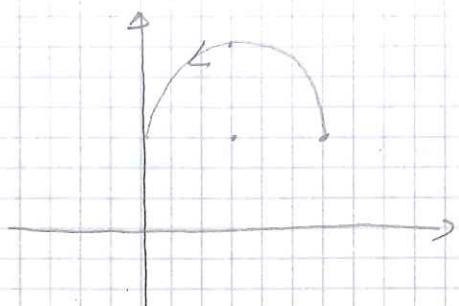
$$\sqrt{E(t, \theta) G(t, \theta) - (F(t, \theta))^2} = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2} t$$

Si ha quindi:

$$\iint_S (x^2 + y^2) \, dS = \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} (t^2 \cos^2 \theta + t^2 \sin^2 \theta) \sqrt{2} t \, dt \, d\theta$$

$$= \sqrt{2} \left(\int_0^1 t^3 \, dt \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \sqrt{2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 2\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

Esercizio 4



Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \rightarrow xy$

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

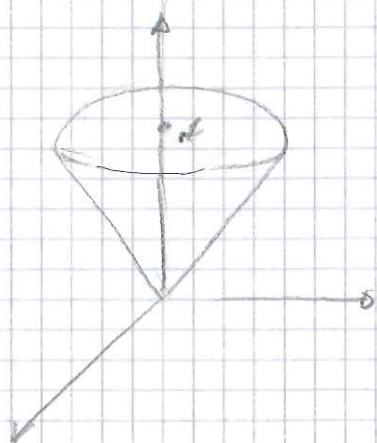
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$

quindi f è una primitiva di $y dx + x dy$

Si ha quindi

$$\int_C y dx + x dy = f(0, 1) - f(2, 1) = 0 - 2 = -2$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$.

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f .

Sia $(x, y, z) \in D$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x$$

Si ha quindi $\text{grad} f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ se e solo se

$$\begin{cases} z = 0 \\ -2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Essendo $(0, 0, 0) \notin D$ si ha

$$E \cap D = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = z^2, 0 < z < 1\}$$

$$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 1, x^2 + y^2 < 1\}$$

$$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 1\}$$

$$F_4 = \{(0, 0, 0)\}$$

Si ha $F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$

Sia

$$g : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$$

F_1 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xz - y^2$$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_1$.

Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(z, -2y, x) = \lambda (2x, 2y, -2z)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} z = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Si ha $z = 2\lambda x = 2\lambda(-2\lambda z) = -4\lambda^2 z$; essendo $z \neq 0$ si ha quindi $1 = -4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = -\frac{1}{4}$; ciò è assurdo.

Quindi il sistema sopra non ha soluzioni.

Si ha quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow z - 1$$

F_2 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ differenziabile di dimensione 2 di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

$$\text{Sia } (x, y, z) \in E \cap F_2$$

Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

Si ha quindi

$$(z, -2y, x) = \lambda (0, 0, 1)$$

Si ha $z = 0$ e $z = 1$; ciò è assurdo.

Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Si ha che

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x^2 + y^2 - 1, z - 1)$$

F_3 è la sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ differenziale di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y, z) = 0$

Si ha $(x, y, z) \in E \cap F_3$.

Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(z, -2y, x) = \lambda (2x, 2y, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} z = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x = \mu \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Si ha $-y = \lambda y$; quindi $y(\lambda + 1) = 0$; quindi $y = 0$ o $\lambda = -1$.

Per $y = 0$ si ha $x^2 = 1$; quindi $x = \pm 1$.

Si trovano i punti $(1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 1)$

Per $\lambda = -1$ si ha $1 = 2x$; quindi $x = \frac{1}{2}$;

si ha $\frac{1}{4} + y^2 = 1$; quindi $y^2 = \frac{3}{4}$; quindi

$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; si trovano i punti

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \text{ e } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

Si ha quindi:

$$E \cap F_3 = \left\{ (1, 0, 1), (-1, 0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \right\}$$

Si ha quindi:

$$E \subset \left\{ (1, 0, 1), (-1, 0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), (0, 0, 0) \right\}$$

Si ha

$$f(0, 0, 0) = 0$$

$$f(1, 0, 1) = 1$$

$$f(-1, 0, 1) = -1$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) = -\frac{1}{4}$$

Si ha quindi $\max(f) = 1$, $\min(f) = -1$

Esercizio 6

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad una equazione differenziale lineare del primo ordine su $\mathbb{R}$

Una primitiva di x^2 è la funzione

$$\alpha(x) = \frac{1}{3} x^3$$

Si ha

$$\int e^{-\frac{1}{3}x^3} 2x^2 dx = -2 \int e^{-\frac{1}{3}x^3} (-x^2) dx$$

$$= -2 e^{-\frac{1}{3}x^3} + C$$

Una primitiva di $e^{-\frac{1}{3}x^3} 2x^2$ è quindi la funzione

$$B(x) = -2 e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = x^2 y + 2x^2$ è quindi

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3} \left(-2 e^{-\frac{1}{3}x^3} + C \right) = C e^{\frac{1}{3}x^3} - 2$$

al variare di C in $\mathbb{R}$

Per la soluzione del problema di Cauchy si ha

$$C - 2 = 0; \text{ quindi } C = 2$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow 2 e^{\frac{1}{3}x^3} - 2$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti su $\mathbb{R}$

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0; \text{ cioè}$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

L'equazione ha per soluzione $\lambda = 1$, doppia.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x e^x$$

Esiste AGR tale che

$$\psi(x) = A x^2 e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = 2Ax e^x + A x^2 e^x$$

$$\begin{aligned} \psi''(x) &= 2A e^x + 2A x e^x + 2A x e^x + A x^2 e^x = \\ &= 2A e^x + 4A x e^x + A x^2 e^x \end{aligned}$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$2A e^x + 4A x e^x + A x^2 e^x - 2(2A x e^x + A x^2 e^x) + A x^2 e^x = e^x$$

cioè

$$2A e^x + 4A x e^x + A x^2 e^x - 4A x e^x - 2A x^2 e^x + A x^2 e^x = e^x$$

cioè

$$2A e^x = e^x$$

cioè $2A = 1$, cioè $A = \frac{1}{2}$

Si ha quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

Un integrale generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Si ha

$$y'(x) = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x + x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione dell'

problema di Cauchy se e solo se

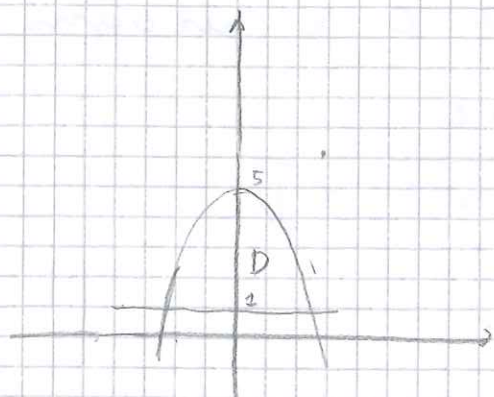
$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

ossia se e solo se $c_1 = 1, c_2 = 0$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi(x) = e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

Esercizio 8



I punti d'intersezione della parabola $y = 5 - x^2$ con la retta $y = 1$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Si ha $1 = 5 - x^2$; quindi $x^2 = 4$; quindi $x = \pm 2$

Si ha quindi

$P_1(D) = [-2, 2]$; per ogni $x \in [-2, 2]$ si ha

$$D(x) = [1, 5 - x^2]$$

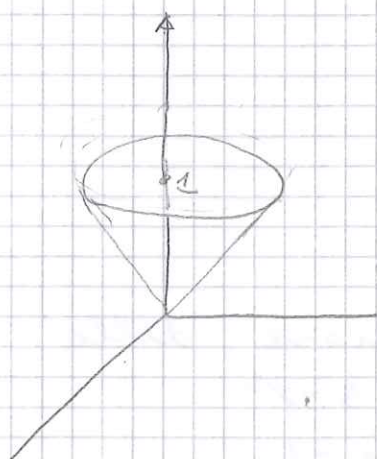
Si ha quindi

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_{-2}^2 \left(\int_1^{5-x^2} x^2 dy \right) dx =$$

$$\int_{-2}^2 x^2 (5 - x^2 - 1) dx = \int_{-2}^2 x^2 (4 - x^2) dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^2 (4x^2 - x^4) dx = \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_{-2}^2 = \\
 &= 2 \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - \frac{1}{5} \cdot 32 \right) = 2 \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \\
 &64 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 64 \frac{2}{15} = \frac{128}{15}
 \end{aligned}$$

Esercizio 12



Si ha

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

Si ha $P_{1,2}(D) = C$ e per ogni

$(x, y) \in C$ si ha

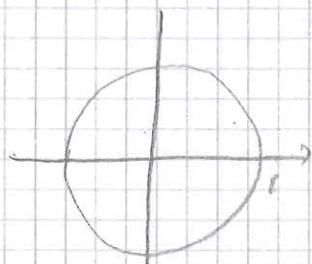
$$D(x, y) = [\sqrt{x^2 + y^2}, 1]$$

Si ha quindi

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_C \left(\int_{D(x, y)} (x^2 + y^2) dz \right) dx dy =$$

$$= \iint_C (x^2 + y^2) \left(\int_{D(x, y)} dz \right) dx dy =$$

$$= \iint_C (x^2 + y^2) (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$



Una parametrizzazione in
termini di C è la funzione
 φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

$$\iint_C (x^2 + y^2) (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy =$$

$$= \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \rho^2 (1 - \rho) \rho d\rho dt =$$

$$= \left(\int_0^1 (\rho^3 - \rho^4) d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = 2\pi \frac{1}{20} =$$

$$= \frac{\pi}{10}$$