

Analisi Matematica 2 - 11/1/16

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : . . .

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow ((x + 3y)^3, (2x - y)^4) ;$$

- (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 0)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.
- (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 0)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

- (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 0)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, 0))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; y \sin(x + z) - x \cos y + \pi = 0\} ;$$

- (a) (non assegnata) dimostrare che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2;
- (b) (p. 3) tenendo conto che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2 di equazione cartesiana

$$y \sin(x + z) - x \cos y + \pi = 0 ,$$

determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, il piano tangente a V in $(\pi, 0, \frac{\pi}{2})$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare);

- (c) (p. 1) determinare una base dello spazio tangente a V in $(\pi, 0, \frac{\pi}{2})$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy \cos(x^2 y) dx + x^2 \cos(x^2 y) dy .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x^2 \cos(x^2 y) dx + 2xy \cos(x^2 y) dy .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int \int_S (x - y) dx \wedge dy ,$$

dove S è il triangolo di vertici $(1, 3, 2)$, $(2, 4, 3)$, $(3, -1, 2)$, orientato in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzioni (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_{\gamma} y ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = x^2, -1 \leq x \leq 1\} .$$

Suggerimento. Per il calcolo dell'integrale di una funzione di una variabile $f(t)$, si ponga $t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$; si utilizzino poi le formule $\operatorname{sh}(2u) = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$ e $\operatorname{sh}^2 z = \frac{\operatorname{ch}(2z) - 1}{2}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 3x + 2y - 4z ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x \, dx dy \, ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \, 1 \leq x \leq 2, \, x^2 - y^2 \geq 1\} \, .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (2x + 3y + 2z) \, dx dy dz \, ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \, x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4, \, z \geq 0\} \, .$$

Svolgimento e risposta.

Si utilizzino le simmetrie.