

Analisi Matematica 2 - 11/1/16

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \rightarrow ((x + 3y)^3, (2x - y)^4) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 0)$ esprimendola nella forma $T : V \rightarrow W, h \rightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 0)$ tale che

$$U \rightarrow f(U), u \rightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 0)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, 0))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; y \sin(x + z) - x \cos y + \pi = 0\} ;$$

(a) (non assegnata) dimostrare che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2;

(b) (p. 3) tenendo conto che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 2 di equazione cartesiana

$$y \sin(x + z) - x \cos y + \pi = 0 ,$$

determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, il piano tangente a V in $(\pi, 0, \frac{\pi}{2})$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare);

(c) (p. 1) determinare una base dello spazio tangente a V in $(\pi, 0, \frac{\pi}{2})$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy \cos(x^2 y) dx + x^2 \cos(x^2 y) dy .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x^2 \cos(x^2 y) dx + 2xy \cos(x^2 y) dy .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int \int_S (x - y) dx \wedge dy ,$$

dove S è il triangolo di vertici $(1, 3, 2)$, $(2, 4, 3)$, $(3, -1, 2)$, orientato in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzioni (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int_{\gamma} y ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y = x^2, -1 \leq x \leq 1\} .$$

Suggerimento. Per il calcolo dell'integrale di una funzione di una variabile $f(t)$, si ponga $t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$; si utilizzino poi le formule $\operatorname{sh}(2u) = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$ e $\operatorname{sh}^2 z = \frac{\operatorname{ch}(2z) - 1}{2}$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 3x + 2y - 4z ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = xe^x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x \, dx \, dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x \leq 2, x^2 - y^2 \geq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4)

10. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int \int \int_D (2x + 3y + 2z) \, dx \, dy \, dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4, z \geq 0\} .$$

Svolgimento e risposta.

Si utilizzino le simmetrie.

Esercizio 1

a) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (3(x+3y)^2, 4(2x-y)^3 \cdot 2) = (3(x+3y)^2, 8(2x-y)^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (3(x+3y)^2 \cdot 3, 4(2x-y)^3(-1)) = (9(x+3y)^2, -4(2x-y)^3)$$

P_1 ha quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = (3, 64), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = (9, -32)$$

P_1 ha quindi

$$f'(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 64 & -32 \end{pmatrix}$$

P_1 ha quindi

$$f'(1, 0): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \mapsto (3h_1 + 9h_2, 64h_1 - 32h_2)$$

b) P_1 ha

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 64 & -32 \end{vmatrix} = -96 - 576 = -672 \neq 0$$

Quindi esiste U intorno aperto di $(1, 0)$ tale che

$$U \rightarrow f(U), (x, y) \mapsto f(x, y)$$

è un diffeomorfismo

c) Se ho $f(1, 0) = (1, 16)$

Se ho

$$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 64 & -32 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-672} \begin{pmatrix} -32 & -9 \\ -64 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{21} & \frac{3}{224} \\ \frac{2}{21} & -\frac{1}{224} \end{pmatrix}$$

Se ho quindi:

$$(f^{-1})'(1, 16): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \rightarrow \left(\frac{1}{21} h_1 + \frac{3}{224} h_2, \frac{2}{21} h_1 - \frac{1}{224} h_2 \right)$$

Esercizio 2

a) Se

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow y \sin(x+z) - x \cos y + \pi$$

Se ho

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y \cos(x+z) - \cos y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \sin(x+z) + x \sin y$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = y \cos(x+z)$$

Se $\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0$ se e solo se

$$y = 0 \quad \text{e} \quad \cos(x+z) = 0$$

Se $y = 0$, nhe

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = -1 \neq 0$$

Se $\cos(x+z) = 0$ nhe

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = -\cos y$$

Se nhe quando:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Se nhe} \quad \sin(x+z) = \pm 1$$

Se $(x, y, z) \in V$ nhe

$$y \sin(x+z) - x \cos y + \pi = 0$$

Quando:

$$\pm \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + \pi = 0$$

Quando:

$$\pm \left(\frac{1}{2} + k \right) + 1 = 0$$

Se $\frac{1}{2} + k + 1 = 0$, nhe $k = -\frac{3}{2}$; que é absurdo.

Se

$$-\frac{1}{2} - k + 1 = 0, \text{ si ha } k = \frac{1}{2}; \text{ il cui è assurdo.}$$

$$\text{Se } \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = 0 \text{ e } \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 0 \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

quindi $(x, y, z) \notin V$

Per ogni $(x, y, z) \in V$ si ha quindi

$$\text{tanga } g'(x, y, z) = 0$$

b) Si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(\pi, 0, \frac{\pi}{2}) = 0$$

Una base di $N_{(\pi, 0, \frac{\pi}{2})}(V)$ è $(-1, -1, 0)$

Un'altra base è $(1, 0, 0)$

delle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi

$$(x, y, z) = t(1, 1, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni parametriche della retta normale sono

$$(x, y, z) = t(1, 1, 0) + (\pi, 0, \frac{\pi}{2}), \quad t \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\begin{cases} x = t + \pi \\ y = t \\ z = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono

$$((x, y, z) | (1, 1, 0)) = 0$$

cioè

$$x + y = 0$$

Delle equazioni cartesiane del piano tangente sono

$$((x - \pi, y, z - \frac{\pi}{2}) | (1, 1, 0)) = 0$$

cioè

$$x - \pi + y = 0$$

cioè

$$x + y - \pi = 0$$

c) Una base dello spazio normale è $(1, 1, 0)$

$(1, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sono ortogonali a $(1, 1, 0)$

Quindi appartengono allo spazio tangente. Si ha

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Quindi $(1, -1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti. Quindi

$$((1, -1, 0), (0, 0, 1))$$

è una base dello spazio tangente.

Esercizio 3

Sia w la forma differenziale.

Si ha $\text{dom}(w) = \mathbb{R}^2$. Sia

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x^2 y)$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x^2 y) \cdot 2xy = 2xy \cos(x^2 y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(x^2 y) \cdot x^2 = x^2 \cos(x^2 y)$$

Quindi f è una primitiva di w ; quindi w è esatta.

L'insieme delle primitive di w è

$$\{f+c; c \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4

Sia w la forma differenziale

si ha $\text{dom}(w) = \mathbb{R}^2$

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos(x^2 y)) = x^2 (-\sin(x^2 y)) x^2 = -x^4 \sin(x^2 y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (2xy \cos(x^2 y)) &= 2y \cos(x^2 y) + 2xy (-\sin(x^2 y)) 2xy \\ &= 2y \cos(x^2 y) - 4x^2 y^2 \sin(x^2 y) \end{aligned}$$

si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos(x^2 y)) \neq \frac{\partial}{\partial x} (2xy \cos(x^2 y))$$

Quindi la forma differenziale non è chiusa; quindi non è esatta.

Esercizio 5

Sia

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$$

Una parametrizzazione di S non orientata è la funzione φ

$$(x, y, z) = u(1, 3, 2) + v(2, 4, 3) + (1-u-v)(3, -1, 2),$$

$$(u, v) \in T$$

cose

$$\begin{cases} x = -2u - v + 3 \\ y = 4u + 5v - 1 \\ z = v + 2 \end{cases} \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si ha } \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6 < 0$$

Quindi φ è una parametrizzazione di $-S$

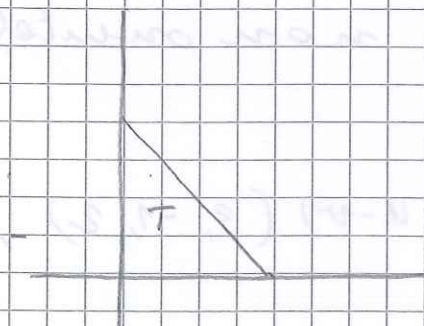
Si ha quindi

$$\iint_S (x-y) dx \wedge dy = - \iint_{-S} (x-y) dx \wedge dy =$$

$$= - \iint_T (-2u - v + 3 - 4u - 5v + 1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} du dv =$$

$$= - \iint_T (-6u - 6v + 4) (-6) du dv =$$

$$= -12 \iint_T (3u + 3v - 2) du dv$$

Si ha $p_1(T) = [0, 1]$ eper ogni $u \in [0, 1]$ si ha

$$T(u) = [0, 1-u]$$

Sche quadri:

$$-12 \iint_T (3u + 3v - 2) du dv =$$

$$= -12 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (3u + 3v - 2) dv \right) du =$$

$$= -12 \int_0^1 \left[3uv + \frac{3}{2} v^2 - 2v \right]_0^{1-u} du =$$

$$= -12 \int_0^1 \left(3u(1-u) + \frac{3}{2} (1-u)^2 - 2(1-u) \right) du =$$

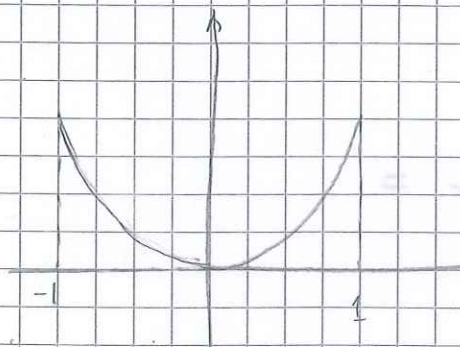
$$= -12 \int_0^1 \left(3u - 3u^2 + \frac{3}{2} - 3u + \frac{3}{2} u^2 - 2 + 2u \right) du =$$

$$= -12 \int_0^1 \left(-\frac{3}{2} u^2 + 2u - \frac{1}{2} \right) du =$$

$$= -12 \left[-\frac{1}{2} u^3 + u^2 - \frac{1}{2} u \right]_0^1 =$$

$$= -12 \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Esercizio 6



Una parametrizzazione
di γ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$$

Per ogni $t \in [-1, 1]$ si ha $\varphi'(t) = (1, 2t)$;
quindi $\varphi'(t) = \sqrt{1 + 4t^2}$

Si ha quindi

$$\int_8 y \, ds = \int_{-1}^1 t^2 \sqrt{1+4t^2} \, dt$$

Poniamo $t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$; si ha $\frac{dt}{du} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} u$

Per $t = 1$ si ha $u = \operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2$; per $t = -1$

si ha $u = -\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2$.

Si ha quindi

$$\int_8 y \, ds = \int_{-\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2}^{\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} u \right)^2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} u \, du$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2}^{\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2} \operatorname{sh}^2 u \sqrt{\operatorname{ch}^2 u} \operatorname{ch} u \, du$$

$$= \frac{1}{8} \int_{-\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2}^{\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2} \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 u \, du =$$

$$= \frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2}^{\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2} 4 \operatorname{sh}^2 u \operatorname{ch}^2 u \, du =$$

$$= \frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2}^{\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2} (2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u)^2 \, du =$$

$$= \frac{1}{32} \int_{-\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2}^{\operatorname{Ar} \operatorname{gsh} 2} \operatorname{sh}^2(2u) \, du =$$

$$= \frac{1}{32} \int_{-A \operatorname{ar} gsh 2}^{A \operatorname{ar} gsh 2} \frac{\operatorname{ch}(4u) - 1}{2} du =$$

$$= \frac{1}{64} \left[\frac{1}{4} \operatorname{sh}(4u) - u \right]_{-A \operatorname{ar} gsh 2}^{A \operatorname{ar} gsh 2} =$$

$$= \frac{1}{64} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh}(4 A \operatorname{ar} gsh 2) - A \operatorname{ar} gsh 2 + \frac{1}{4} \operatorname{sh}(4 A \operatorname{ar} gsh 2) - A \operatorname{ar} gsh 2 \right)$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh}(4 A \operatorname{ar} gsh 2) - A \operatorname{ar} gsh 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{128} 2 \operatorname{sh}(2 A \operatorname{ar} gsh 2) \operatorname{ch}(2 A \operatorname{ar} gsh 2) - \frac{A \operatorname{ar} gsh 2}{32} =$$

$$= \frac{1}{64} 2 \operatorname{sh} A \operatorname{ar} gsh 2 \operatorname{ch} A \operatorname{ar} gsh 2 (\operatorname{ch}^2 A \operatorname{ar} gsh 2 + \operatorname{sh}^2 A \operatorname{ar} gsh 2)$$

$$- \frac{A \operatorname{ar} gsh 2}{32} =$$

$$= \frac{1}{32} 2 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 A \operatorname{ar} gsh 2} (1 + \operatorname{sh}^2 A \operatorname{ar} gsh 2 + 4) - \frac{A \operatorname{ar} gsh 2}{32} =$$

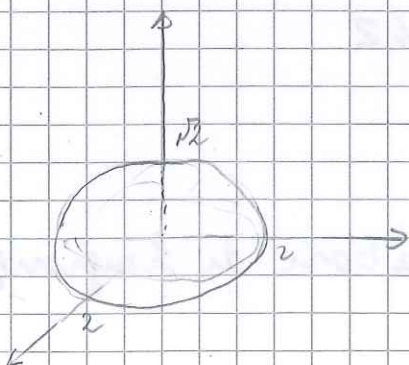
$$= \frac{1}{16} \sqrt{5} \cdot 9 - \frac{A \operatorname{ar} gsh 2}{32} = \frac{9}{16} \sqrt{5} - \frac{A \operatorname{ar} gsh 2}{32}$$

Esercizio 7

a) Sia $D = \operatorname{dom}(f)$

è il dominio limitato
dell'ellissoide di centro $(0,0,0)$
e semiasse $a_x = 2$ $a_y = 2$ $a_z = \sqrt{2}$

Essendo D compatto ed



essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di f

Sia $(x, y, z) \in D^0$; allora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3 \neq 0$$

Sia quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Sia che

$$F_2(D) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \}$$

Sia

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$$

$F_2(D)$ è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana

$$g(x, y, z) = 0$$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 3x + 2y - 4z$$

$$\text{Sia } (x, y, z) \in E \cap F_2(D)$$

Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange

esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

Si ha quindi

$$(3, 2, -4) = \lambda (2x, 2y, 4z)$$

cioè

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ -4 = 4\lambda z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni;
supponiamo $\lambda \neq 0$.

$$\text{Si ha } x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda}$$

quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 4;$$

$$\text{quindi } \frac{17}{4\lambda^2} = 4; \quad \text{quindi } \lambda^2 = \frac{17}{16};$$

$$\text{quindi } \lambda = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\text{Per } \lambda = \frac{\sqrt{17}}{4}, \text{ si ha } x = \frac{3}{2} \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}} \sqrt{17}$$

$$y = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{17} \sqrt{17}, \quad z = -\frac{4}{17} \sqrt{17}$$

$$\text{Si trovano i punti } \left(\frac{2}{\sqrt{17}} \sqrt{17}, \frac{4}{17} \sqrt{17}, -\frac{4}{17} \sqrt{17}\right)$$

Analogamente per $\lambda = -\frac{\sqrt{21}}{4}$ otteniamo il punto

$$\left(-\frac{2}{7}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}\right)$$

Si ha quindi

$$E \cap F_2(D) \subset \left\{ \left(\frac{2}{7}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}\right), \left(-\frac{2}{7}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}\right) \right\}$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{2}{7}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}\right), \left(-\frac{2}{7}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}\right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{2}{7}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}\right) = \frac{6}{7}\sqrt{21} + \frac{8}{21}\sqrt{21} + \frac{16}{21}\sqrt{21}$$

$$= \frac{42}{21}\sqrt{21} = 2\sqrt{21}$$

$$f\left(-\frac{2}{7}\sqrt{21}, -\frac{4}{21}\sqrt{21}, \frac{4}{21}\sqrt{21}\right) = -2\sqrt{21}$$

Si ha quindi $\max(f) = 2\sqrt{21}$, $\min(f) = -2\sqrt{21}$

Esercizio 8

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

cioè

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

L'equazione ha soluzione $\lambda = -1$ doppia

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \quad \varphi_2(x) = x e^{-x}$$

Non essendo 1 soluzione dell'equazione caratteristica, esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = (A + Bx) e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = B e^x + (A + Bx) e^x = (A + B + Bx) e^x$$

$$\psi''(x) = B e^x + (A + B + Bx) e^x = (A + 2B + Bx) e^x$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$(A + 2B + Bx) e^x + 2(A + B + Bx) e^x + (A + Bx) e^x = x e^x$$

Quindi se e solo se

$$\begin{cases} A + 2B + 2A + 2B + A = 0 \\ B + 2B + B = 1 \end{cases}$$

Quindi se e solo se

$$\begin{cases} 4B = 1 \\ 4A + 4B = 0 \end{cases}$$

Quindi se e solo se

$$\begin{cases} B = \frac{1}{4} \\ A = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x$$

Un integrale generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x$$

Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x \\ &= -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

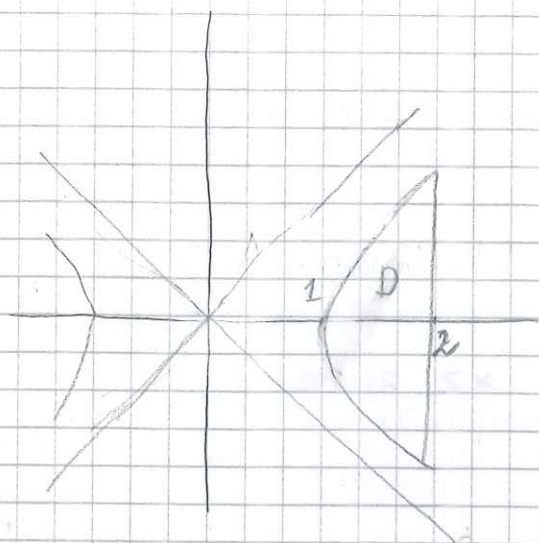
$$\begin{cases} C_1 - \frac{1}{4} = 0 \\ -C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi se e solo se $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{1}{4}$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}xe^x$$

Esercizio 9



Sicché $p_1(D) = [1, 2]$

e per ogni $x \in [1, 2]$

si ha

$$D(x) = \left[-\sqrt{x^2 - 1}, \sqrt{x^2 - 1} \right]$$

Sicché quindi

$$\iint_D x \, dx \, dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} x \, dy \right) dx =$$

$$= \int_1^2 x \cdot 2\sqrt{x^2-1} \, dx = \int_1^2 (x^2-1)^{\frac{1}{2}} 2x \, dx =$$

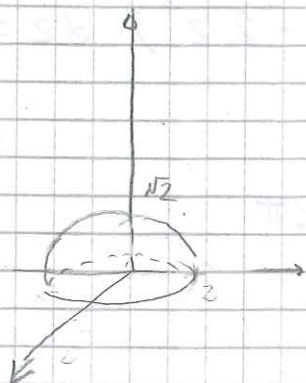
$$= \left[\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{27} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Esercizio 10 (1° modulo)

Si ha

$$\iiint_D (2x + 3y + 2z) \, dx \, dy \, dz =$$



$$2 \iiint_D x \, dx \, dy \, dz + 3 \iiint_D y \, dx \, dy \, dz + 2 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$$

Per la simmetria rispetto al piano yz si ha

$$\iiint_D x \, dx \, dy \, dz = 0$$

Per la simmetria rispetto al piano xz si ha

$$\iiint_D y \, dx \, dy \, dz = 0$$

Si ha quindi

$$\iiint_D (2x + 3y + 2z) \, dx \, dy \, dz = 2 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$$

Si ha $p_3(D) = [0, \sqrt{2}]$ e, per ogni $z \in [0, \sqrt{2}]$ si ha

$$D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4 - 2z^2 \}$$

Si ha quindi

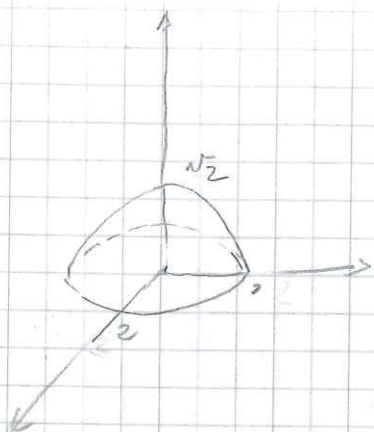
$$2 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(\iint_{D(z)} z \, dx \, dy \right) dz =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} z \left(\iint_{D(z)} dx \, dy \right) dz = 2 \int_0^{\sqrt{2}} z \, \text{mis}(D(z)) \, dz$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} z \pi (4 - 2z^2) \, dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (4z - 2z^3) \, dz =$$

$$= 2\pi \left[2z^2 - \frac{z^4}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi (4 - 2) = 4\pi$$

Esercizio 10 (20 moduli)



Per simmetria si ha

$$\iiint_D (2x + 3y + 2z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= 2 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz =$$

La funzione α

$$\begin{cases} x = 2\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = 2\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \sqrt{2}\rho \cos\varphi \end{cases} \quad (\rho, \varphi, \theta) \in [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$$

è una parametrizzazione in misure di φ

$$\text{Per ogni } (\rho, \varphi, \theta) \in \text{dom } \alpha \text{ si ha } |\det \alpha'(\rho, \varphi, \theta)| =$$

$$= 4\sqrt{2}\rho^2 \sin\varphi$$

Si ha quindi

$$2 \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = 2 \iiint_{[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]} \sqrt{2}\rho \cos\varphi \cdot 4\sqrt{2}\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 16 \cdot \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) =$$

$$= 16 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi =$$

$$= 16 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 4\pi$$