Analisi Matematica 2 - 26/1/16 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Sia

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 - xy + z^2 - 1 = 0,\ xz - 1 = 0\} \ ;$$

   (a) (non assegnata) dimostrare che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1;

   (b) (p. 3) sapendo che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1 di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 - xy + z^2 - 1 = 0 \\ xz - 1 = 0 \end{cases} ,$$

   determinare lo spazio normale, il piano normale, lo spazio tangente, la retta tangente a V in $(1,1,1)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare);

   (c) (p. 1) determinare una base dello spazio tangente a V in $(1,1,1)$.

   Suggerimento. Il prodotto vettoriale di due vettori linearmente indipendenti è ortogonale al sottospazio generato dai due vettori.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Sia

$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \int_{\mathrm{Arctg}\, x}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt \ ,$$

calcolare la derivata di f.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy\, dx + x^2\, dy + xz\, dz \ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzioni

$$\int_\gamma z\, ds \ ,$$

dove

$$\gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t);\ t \in [0, 2\pi]\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int\int_S z\, dx \wedge dy \ ,$$

dove S è la superfice

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\} \ ,$$

orientata in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ con $z \neq 0$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow |x| + |y| + |z| \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Suggerimento. Tenendo conto di simmetrie, l'immagine di f è uguale all'immagine della restrizione di f a $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\}$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - y'' = x^2 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ y \leq 1 - x^2,\ x + y \geq 1\right\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.