

Analisi Matematica 2 - 26/1/16 - Compito 6

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x};$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}.$$

- (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i .

Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 - xy + z^2 - 1 = 0, xz - 1 = 0\};$$

- (a) (non assegnata) dimostrare che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1;
- (b) (p. 3) sapendo che V è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1 di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 - xy + z^2 - 1 = 0 \\ xz - 1 = 0 \end{cases},$$

determinare lo spazio normale, il piano normale, lo spazio tangente, la retta tangente a V in $(1, 1, 1)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare);

- (c) (p. 1) determinare una base dello spazio tangente a V in $(1, 1, 1)$.

Suggerimento. Il prodotto vettoriale di due vettori linearmente indipendenti è ortogonale al sottospazio generato dai due vettori.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Sia

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow \int_{\operatorname{Arctg} x}^1 \sqrt{1+t^2} dt ,$$

calcolare la derivata di f .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy dx + x^2 dy + xz dz .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzioni

$$\int_{\gamma} z ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(t \cos t, t \sin t, t); t \in [0, 2\pi]\} .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int \int_S z dx \wedge dy ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\} ,$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ con $z \neq 0$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\} \rightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \rightarrow |x| + |y| + |z|,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Suggerimento. Tenendo conto di simmetrie, l'immagine di f è uguale all'immagine della restrizione di f a $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4\}$.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - y'' = x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \leq 1 - x^2, x + y \geq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$$

b) Per ogni $(x, y) \in \text{dom}(f)$ vale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Si ha quindi

$$\text{grad } f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

c) Per ogni $(x, y) \in \text{dom}(f)$ vale

$$df(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (h_1, h_2) \rightarrow -\frac{y}{x^2 + y^2} h_1 + \frac{x}{x^2 + y^2} h_2$$

d) Si ha

$$df(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Esercizio 2

a) Si ha

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x^2 - xy + z^2 - 1, 2xz - 2)$$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vale

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = (2x - y, 2z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = (-x, 0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = (2z, 2x)$$

Si ha quindi:

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x & 2z \\ 2z & 0 & 2x \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -x & 2z \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = -2x^2 = 0 \text{ se e solo se } x = 0$$

Quindi per $x \neq 0$ si ha $\text{range } g'(x, y, z) = 2$

Per $x = 0$ si ha $g_2(x, y, z) = -2$; quindi $(x, y, z) \notin V$

Si ha quindi:

$$\forall (x, y, z) \in V \text{ range } g'(x, y, z) = 2$$

Quindi V è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

b) Si ha

$$\text{grad } g_1(x, y, z) = (2x - y, -x, 2z)$$

$$\text{grad } g_2(x, y, z) = (2z, 0, 2x)$$

Si ha quindi

$$\text{grad } g_1(1, 1, 1) = (1, -1, 2)$$

$$\text{grad } g_2(1, 1, 1) = (2, 0, 2)$$

Una base di $N_{(1,1,1)}(V)$ è

$$\left((1, -1, 2), (2, 0, 2) \right)$$

Un'altra base è quindi

$$\left((1, -1, 2), (1, 0, 1) \right)$$

Delle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi

$$(x, y, z) = u(1, -1, 2) + v(1, 0, 1) \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = -u \\ z = 2u + v \end{cases} \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni parametriche del piano normale sono quindi

$$(x, y, z) = u(1, -1, 2) + v(1, 0, 1) + (1, 1, 1)$$

cioè

$$\begin{cases} x = u + v + 1 \\ y = -u + 1 \\ z = 2u + v + 1 \end{cases} \quad , \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono

$$\begin{cases} ((x, y, z) | (1, -1, 2)) = 0 \\ ((x, y, z) | (1, 0, 1)) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Nelle equazioni contenute nella retta tangente sono

$$\begin{cases} ((x, y, z) - (1, 1, 1) | (1, -1, 2)) = 0 \\ ((x, y, z) - (1, 1, 1) | (1, 0, 1)) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x - 1 - (y - 1) + 2(z - 1) = 0 \\ x - 1 + y - 1 = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

c) Un vettore non nullo ortogonale allo spazio tangente è dato da

$$(1, -1, 2) \wedge (1, 0, 1),$$

cioè

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, 1, -1)$$

Quindi una base dello spazio tangente è $(1, 1, -1)$.

Esercizio 3

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x) = -\sqrt{1 + \operatorname{Arctg}^2 x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -\frac{\sqrt{1 + \operatorname{Arctg}^2 x}}{1+x^2}$$

Esercizio 4

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial z} (xyz) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x} (xz) = z$$

Quindi la forma differenziale non è chiusa;
quindi la forma differenziale non è esatta

Esercizio 5

Una parametrizzazione di γ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} =$$

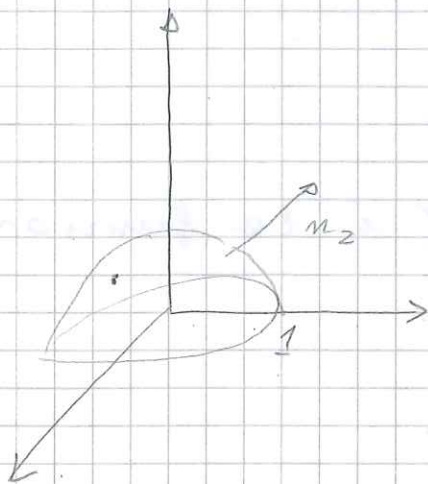
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{1 + t^2 + 1} = \sqrt{2 + t^2}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} z \, ds &= \int_0^{2\pi} t \sqrt{2+t^2} \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2+t^2)^{\frac{1}{2}} (2t) \, dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \left((2+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left((2+4\pi) \sqrt{2+4\pi} - 2\sqrt{2} \right) = \frac{2}{3} \left((1+2\pi) \sqrt{2+4\pi} - \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

Esercizio 6



Una parametrizzazione
in misure di S non
orientata è la
funzione α

$$\begin{cases} x = \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sin \varphi \sin \theta \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

$$(\varphi, \theta) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\varphi, \theta) \in \text{dom}(\alpha)$ si ha

$$\alpha'(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

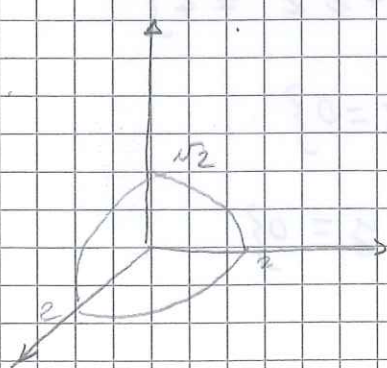
$$\begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} = \sin \varphi \cos \varphi > 0 \text{ per } z > 0$$

Quindi α è concorde con l'orientazione di S

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \iint_S z \, dx \wedge dy &= \\ &= \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]} \cos \varphi \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \cos \theta \end{vmatrix} d\varphi d\theta = \\ &= \iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]} \cos \varphi \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi d\theta = \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \\ &= 2\pi \left(- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi (-\sin \varphi) \, d\varphi \right) = \\ &= 2\pi \left(- \left[\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2}{3} \pi \end{aligned}$$

Esercizio 7



a) S.e. $D = \text{dom}(f)$

Essendo f continua e
 D compatto per il teorema di
 Weierstrass f ammette

massimo e minimo

b) Sia

$$D_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 4 \}$$

Per ogni $(x, y, z) \in D$, si ha $(|x|, |y|, |z|) \in D_1$ e

$$f(x, y, z) = f(|x|, |y|, |z|)$$

Da ciò segue che $f(D) = f(D_1)$; quindi si ha

$$\max(f) = \max(f|_{D_1}) \quad \text{e} \quad \min(f) = \min(f|_{D_1})$$

Possiamo quindi sostituire f con $f|_{D_1}$

Per ogni $(x, y, z) \in D_1$ si ha

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo di $f|_{D_1}$

Sia $(x, y, z) \in \overset{\circ}{D}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 \neq 0$$

Si ha quindi

$$E \cap \overset{\circ}{D}_1 = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \}$$

$$F_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 4, z = 0 \}$$

$$F_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x > 0, z > 0, x^2 + 2z^2 < 4, y = 0 \}$$

$$F_4 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0, z > 0, y^2 + 2z^2 < 4, x = 0 \}$$

$$F_5 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < x < 2, y = 0, z = 0 \}$$

$$F_6 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < y < 2, x = 0, z = 0 \}$$

$$F_7 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < \sqrt{2}, x = 0, y = 0 \}$$

$$F_8 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 4, z = 0 \}$$

$$F_9 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0, z > 0, y^2 + 2z^2 = 4, x = 0 \}$$

$$F_{10} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0, x^2 + 2z^2 = 4, y = 0 \}$$

$$F_{11} = \{ (0, 0, 0) \}$$

$$F_{12} = \{ (2, 0, 0) \}$$

$$F_{13} = \{ (0, 2, 0) \}$$

$$F_{14} = \{ (0, 0, \sqrt{2}) \}$$

$$\text{Si ha } F_0(0) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6 \cup F_7 \cup F_8 \cup F_9 \cup F_{10} \cup F_{11} \cup F_{12} \cup F_{13} \cup F_{14}$$

Si definisce f con la funzione

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z$$

Si ha

$$g: \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0 \} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$$

F_1 è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione cartesiana $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in F_1$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, 1, 1) = \lambda (2x, 2y, 4z)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 4\lambda z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = \frac{1}{4\lambda}$$

Si ha quindi

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 4$$

quindi

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 4$$

quindi $\frac{5}{8\lambda^2} = 4$; quindi $\lambda^2 = \frac{5}{32}$; quindi $\lambda = \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$

$$= \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Per $\lambda = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}}$ si ha $x = \frac{1}{2} \cdot 4 \sqrt{\frac{2}{5}} = 2 \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5} \sqrt{10}$

$y = \frac{2}{5} \sqrt{10}$, $z = \frac{1}{5} \sqrt{10}$; quindi si trova il punto

$$\left(\frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{1}{5} \sqrt{10} \right)$$

Per $\lambda = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}}$ si ha $x < 0$; quindi nessuna soluzione.

Si ha quindi

$$E \cap E_1 \subset \left\{ \left(\frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{1}{5} \sqrt{10} \right) \right\}$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 4\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow z$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_2$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, 1, 1) = \lambda (0, 0, 1)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0, x^2 + 2z^2 < 4\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow y$$

F_3 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_3$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, 1, 1) = \lambda (0, 1, 0)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_3 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0, z > 0, y^2 + 2z^2 < 4\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \rightarrow x$$

F_4 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_4$. Per il teorema sui moltiplicatori

di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, 1, 1) = \lambda (1, 0, 0)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_4 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < x < 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (y, z)$$

F_5 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_5$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, 1, 1) = \lambda (0, 1, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_5 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < y < 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, z)$$

F_6 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_6$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, 1, 1) = \lambda (1, 0, 0) + \mu (0, 0, 1)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_6 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 < z < \sqrt{2}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_2$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, 1, 1) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$$

Si ha $1=0$; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Sia ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 - 4, z)$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni contenute $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_2$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tali che

$$(1, 1, 1) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(0, 0, 1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = \mu \\ x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha $x = \frac{1}{2\lambda}$, $y = \frac{1}{2\lambda}$; quindi

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 4; \text{ cioè } \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 4; \text{ cioè } \frac{1}{2\lambda^2} = 4$$

$$\text{cioè } \lambda^2 = \frac{1}{8}; \text{ quindi } \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Per $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ si ha $x = \frac{1}{2} 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$; si trova il punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

Per $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ si ha $x < 0$; quindi nessuna soluzione si ha quindi

$$E \cap F_g = \left\{ (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \right\}$$

Si ha ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (y^2 + 2z^2 - 4, x)$$

F_g è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazione contenente $g(x, y, z) = 0$

Se $(x, y, z) \in E \cap F_g$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè vale che

$$(1, 1, 1) = \lambda (0, 2y, 4z) + \mu (1, 0, 0)$$

si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = \mu \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 4\lambda z \\ y^2 + 2z^2 = 4 \\ x = 0 \\ y > 0, z > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$.

$$\text{Si ha } y = \frac{1}{2\lambda}, z = \frac{1}{4\lambda}; \text{ quindi } \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\text{cioè } \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 4; \text{ cioè } \frac{3}{8\lambda^2} = 4; \text{ cioè } \lambda^2 = \frac{3}{32}$$

cioè $\lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Per $\lambda = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $y = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$ e $z = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$

Si trova il punto $(0, \frac{2}{3} \sqrt{6}, \frac{1}{3} \sqrt{6})$

Per $\lambda = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $y < 0$; quindi nessuna soluzione

Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{ \left(0, \frac{2}{3} \sqrt{6}, \frac{1}{3} \sqrt{6} \right) \right\}$$

Si ha ora

$$g: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, z > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (x^2 + 2z^2, y)$$

F_{10} è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 di equazioni contenute in $g(x, y, z) = 0$

Sia $(x, y, z) \in E \cap F_{10}$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad } f(x, y, z) = \lambda \text{ grad } g_1(x, y, z) + \mu \text{ grad } g_2(x, y, z)$$

cioè tale che

$$(1, 1, 1) = \lambda (2x, 0, 4z) + \mu (0, 1, 0)$$

Si ha

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 1 = \mu \\ 1 = 4\lambda z \\ x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 0 \\ x > 0, z > 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \quad z = \frac{1}{4\lambda}; \quad \text{quindi} \quad \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 4$$

$$\text{cioè} \quad \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{8\lambda^2} = 4; \quad \text{cioè} \quad \frac{3}{8\lambda^2} = 4; \quad \text{cioè} \quad \lambda^2 = \frac{3}{32};$$

$$\text{cioè} \quad \lambda = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Per $\lambda = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $x = \frac{1}{2} 4 \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt{6}$, $z = \frac{1}{4} 4 \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{6}$

Si trova il punto $(\frac{2}{3} \sqrt{6}, 0, \frac{1}{3} \sqrt{6})$

Per $\lambda = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}$ si ha $x < 0$; quindi nessuna soluzione

Si ha quindi:

$$E \cap F_1 \subset \left\{ \left(\frac{2}{3} \sqrt{6}, 0, \frac{1}{3} \sqrt{6} \right) \right\}$$

Si ha quindi:

$$E \subset \left\{ \left(\frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{1}{5} \sqrt{10} \right), (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \left(0, \frac{2}{3} \sqrt{6}, \frac{1}{3} \sqrt{6} \right), \right. \\ \left. \left(\frac{2}{3} \sqrt{6}, 0, \frac{1}{3} \sqrt{6} \right), (0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, \sqrt{2}) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{2}{5} \sqrt{10}, \frac{1}{5} \sqrt{10}\right) = \sqrt{10}$$

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}$$

$$f\left(0, \frac{2}{3} \sqrt{6}, \frac{1}{3} \sqrt{6}\right) = \sqrt{6}$$

$$f\left(\frac{2}{3} \sqrt{6}, 0, \frac{1}{3} \sqrt{6}\right) = \sqrt{6}$$

$$f(0, 0, 0) = 0$$

$$f(2, 0, 0) = 2$$

$$f(0, 2, 0) = 2$$

$$f(0, 0, \sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

Si ha quindi $\max f = \sqrt{10}$, $\min f = 0$

Esercizio 8

L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

L'equazione si scrive

$$\lambda^2(\lambda - 1) = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = 0$ doppia e $\lambda = 1$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = e^x$$

Essendo 0 soluzione doppia dell'equazione caratteristica, esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x^2(A + Bx + Cx^2)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi(x) = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4$$

$$\psi'(x) = 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3$$

$$\psi''(x) = 2A + 6Bx + 12Cx^2$$

$$\psi'''(x) = 6B + 24Cx$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$6B + 24Cx - 2A - 6Bx - 12Cx^2 = x^2$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} -12C = 1 \\ 24C - 6B = 0 \\ 6B - 2A = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} C = -\frac{1}{12} \\ B = -\frac{1}{3} \\ A = -1 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\psi(x) = -x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4$$

Un integrale generale dell'equazione differenziale è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x - x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{12} x^4$$

Si ha

$$y'(x) = c_2 + c_3 e^x - 2x - x^2 - \frac{1}{3} x^3$$

$$y''(x) = c_3 e^x - 2 - 2x - x^2$$

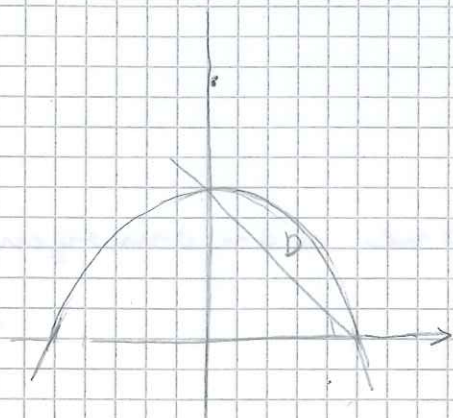
La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \\ c_3 - 2 = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} c_3 = 2 \\ c_1 = -2 \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -2 - 2x + 2e^x - x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{12} x^4$$

Esercizio 9



Si ha $p_1(0) = [0, 1]$ e per ogni

$x \in [0, 1]$, si ha

$$D(x) = [1 - x, 1 - x^2]$$

Si ha quindi

$$\iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} x \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x (1 - x^2 - (1 - x)) \, dx = \int_0^1 x (x - x^2) \, dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Esercizio 10

Si ha

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx dy dz$$

Si ha

$$p_{1,2}(D) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \} \text{ e}$$

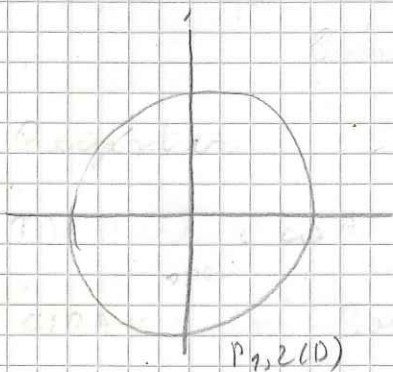
per ogni $(x, y) \in p_{1,2}(D)$ si ha

$$D(x, y) = [x^2 + y^2 - 1, 1 - x^2 - y^2].$$

5) Si ha quindi

$$\iiint_D dx dy dz = \iint_{p_{1,2}(D)} \left(\int_{x^2+y^2-1}^{1-x^2-y^2} dz \right) dx dy =$$

$$= \iint_{p_{1,2}(D)} 2(1 - x^2 - y^2) dx dy = 2 \iint_{p_{1,2}(D)} (1 - x^2 - y^2) dx dy$$



La funzione φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

è una parametrizzazione in misure di $p_{1,2}(D)$.

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha

$$|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho, \quad \text{si ha quindi}$$

$$2 \iint_{P_{1,2}(D)} (1-x^2-y^2) dx dy =$$

$$= 2 \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} (1-\rho^2) \rho d\rho d\theta =$$

$$= 2 \left(\int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) =$$

$$= 4\pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 = 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 4\pi \frac{1}{4} = \pi$$