Analisi Matematica 2 - 10/2/16 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (x^2 - y^2, x^2 + y^2) \ ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1,1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1,1)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1,1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1,1)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Sia
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y\cos(xz + 2y) = 1,\ 2x^2y - xz^2 = 6\} \ ;$$
   (a) (non assegnata) dimostrare che esiste un intorno aperto U di $(-1,1,2)$ tale che $V \cap U$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1;

   (b) (p. 3) sapendo che esiste U intorno aperto di $(-1,1,2)$ tale che $V \cap U$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1 di equazione cartesiana
$$\begin{cases} y\cos(xz + 2y) - 1 = 0 \\ 2x^2y - xz^2 - 6 = 0 \end{cases},$$
   determinare lo spazio normale, il piano normale, lo spazio tangente, la retta tangente a $V \cap U$ in $(-1,1,2)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare);

   (c) (p. 1) determinare una base dello spazio tangente a $V \cap U$ in $(-1,1,2)$.

   Suggerimento. Il prodotto vettoriale di due vettori linearmente indipendenti è ortogonale al sottospazio generato dai due vettori.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy\cos(x^2y)\,dx + x^2\cos(x^2y)\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x^2\cos(x^2y)\,dx + 2xy\cos(x^2y)\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Determinare la lunghezza della seguente curva (non è necessario semplificare il risultato):

$$\gamma = \{(t\cos t, t\sin t, t);\ t \in [0, 2\pi]1\}\ .$$

Suggerimento. Ad un certo punto si utilizzi la sostituzione $t = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,u$. Si osservi poi che $\mathrm{ch}^2\,\frac{z}{2} = \frac{\mathrm{ch}\,z+1}{2}$.
Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int\!\!\int_S x\,dx \wedge dy + y\,dz \wedge dx\ ,$$

dove S è il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(2,2,3)$, $(-1,2,4)$, orientato in modo che per ogni $(x,y,z) \in S$ sia $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$.
Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq x^2,\ x \geq y^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x - y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; risolvere in funzione di α il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' + y = (1 - \alpha + x)e^x \\ y(\alpha) = 0,\ y'(\alpha) = e^\alpha \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 - y^2 \geq 1,\ 1 \leq x \leq 2\right\}\ ;$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 - 1,\ 1 \leq z \leq 2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.