

Analisi Matematica 2 - 10/2/16 - Compito 7

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (x^2 - y^2, x^2 + y^2) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 1)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, 1))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; y \cos(xz + 2y) = 1, 2x^2y - xz^2 = 6\} ;$$

(a) (non assegnata) dimostrare che esiste un intorno aperto U di $(-1, 1, 2)$ tale che $V \cap U$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1;

(b) (p. 3) sapendo che esiste U intorno aperto di $(-1, 1, 2)$ tale che $V \cap U$ è una sottovarietà di $\mathbf{R}^3$ differenziale di dimensione 1 di equazione cartesiana

$$\begin{cases} y \cos(xz + 2y) - 1 = 0 \\ 2x^2y - xz^2 - 6 = 0 \end{cases} ,$$

determinare lo spazio normale, il piano normale, lo spazio tangente, la retta tangente a $V \cap U$ in $(-1, 1, 2)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare);

(c) (p. 1) determinare una base dello spazio tangente a $V \cap U$ in $(-1, 1, 2)$.

Suggerimento. Il prodotto vettoriale di due vettori linearmente indipendenti è ortogonale al sottospazio generato dai due vettori.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$2xy \cos(x^2 y) dx + x^2 \cos(x^2 y) dy .$$

Svolgimento e risposta.

4. (p. 1) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$x^2 \cos(x^2 y) dx + 2xy \cos(x^2 y) dy .$$

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Determinare la lunghezza della seguente curva (non è necessario semplificare il risultato):

$$\gamma = \{(t \cos t, t \sin t, t); t \in [0, 2\pi] \} .$$

Suggerimento. Ad un certo punto si utilizzi la sostituzione $t = \sqrt{2} \operatorname{sh} u$. Si osservi poi che $\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z + 1}{2}$.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int \int_S x dx \wedge dy + y dz \wedge dx ,$$

dove S è il triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(2, 2, 3)$, $(-1, 2, 4)$, orientato in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \geq x^2, x \geq y^2\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x - y,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Sia $\alpha \in \mathbf{R}$; risolvere in funzione di α il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - y' + y = (1 - \alpha + x)e^x \\ y(\alpha) = 0, y'(\alpha) = e^\alpha \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int \int_D x \, dx dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 - y^2 \geq 1, 1 \leq x \leq 2\} ;$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 \leq z^2 - 1, 1 \leq z \leq 2\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x, 2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-2y, 2y)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f'(1, 1): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \longmapsto (2h_1 - 2h_2, 2h_1 + 2h_2)$$

b) Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Quindi per il teorema dell'invertibilità locale esiste U intorno aperto di $(1, 1)$ tale che

$$U \rightarrow f(U), (x, y) \mapsto f(x, y)$$

è un diffeomorfismo

c) Si ha $f(1, 1) = (0, 2)$. Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$(f^{-1})'(0, 2): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (k_1, k_2) \mapsto \left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2, -\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2 \right)$$

Esercizio 2

Sia

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \rightarrow (y \cos(xz + 2y) - 1, 2x^2 y - xz^2 - 6)$$

Si ha

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$\text{Si ha } f(-1, 1, 2) = (\cos 0 - 1, 6 - 6) = (0, 0)$$

quindi $(-1, 1, 2) \in V$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = (-y z \sin(xz + 2y), 4xy - z^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = (\cos(xz + 2y) - 2y \sin(xz + 2y), 2x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = (-yx \sin(xz + 2y), -2xz)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} -yz \sin(xz + 2y) & \cos(xz + 2y) - 2y \sin(xz + 2y) & -yx \sin(xz + 2y) \\ 4xy - z^2 & 2x^2 & -2xz \end{pmatrix}$$

quindi

$$f'(-1, 1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si ha } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Per continuità esiste un intorno aperto di $(-1, 1, 2)$ tale che $\forall (x, y, z) \in U$

$$\begin{vmatrix} \cos(xz + 2y) - 2y \sin(xz + 2y) & -yx \sin(xz + 2y) \\ 2x^2 & -2xz \end{vmatrix} \neq 0$$

quindi per ogni $(x, y, z) \in U$ si ha

$$\text{rank } f'(x, y, z) = 2$$

essendo $V \cap U = \{ (x, y, z) \in U ; f(x, y, z) = 0 \}$ ed essendo

$V \cap U \neq \emptyset$, $V \cap U$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1.

b) Una base dello spazio normale a $V \cap U$ in $(-1, 1, 2)$ è $(\text{grad } f_1(-1, 1, 2), \text{grad } f_2(-1, 1, 2))$, cioè

$$\left((0, 1, 0), (-8, 2, 4) \right)$$

Un'altra base è quindi

$$\left((0, 1, 0), (-4, 1, 2) \right)$$

Nelle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi

$$(x, y, z) = u(0, 1, 0) + v(-4, 1, 2), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

cioè

$$\begin{cases} x = -4v \\ y = u + v \\ z = 2v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni parametriche del piano normale sono

$$(x, y, z) = u(0, 1, 0) + v(-4, 1, 2) + (-1, 1, 2)$$

cioè

$$\begin{cases} x = -4v - 1 \\ y = u + v + 1 \\ z = 2v + 2 \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono

$$\begin{cases} ((x, y, z) | (0, 1, 0)) = 0 \\ ((x, y, z) | (-4, 1, 2)) = 0 \end{cases}, \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ -4x+y+2z=0 \end{cases}, \text{cioè} \begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$$

Delle equazioni contenute nella retta tangente sono

$$\begin{cases} ((x,y,z) - (-1,1,2) | (0,1,0)) = 0 \\ ((x,y,z) - (-1,1,2) | (-4,1,2)) = 0 \end{cases}, \text{cioè}$$

$$\begin{cases} y-1=0 \\ -4(x+1)+y-1+2(z-2)=0 \end{cases}, \text{cioè}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ 2(x+1)-(z-2)=0 \end{cases}, \text{cioè} \begin{cases} y=1 \\ 2x-z+4=0 \end{cases}$$

c) Una base dello spazio tangente a $V \cap U$ in $(-1,1,2)$ è

$$(0,1,0) \wedge (-4,1,2) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2, 0, 4)$$

Un'altra base è $(1, 0, 2)$

Esercizio 3

La forma differenziale è definita su $\mathbb{R}^2$.

Sia

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow \sin(x^2y)$$

Sicché

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x^2y) \cdot 2xy = 2xy \cos(x^2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x^2y) \cdot x^2 = x^2 \cos(x^2y)$$

Quindi f è una primitiva della forma differenziale

Quindi le forme differenziali ω esatte e
l'insieme delle primitive è

$$\{f + c; c \in \mathbb{R}\}$$

Esercizio 4

Il dominio delle forme differenziali è $\mathbb{R}^2$.

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 \cos(x^2 y)) = x^2 (-\sin(x^2 y)) x^2 = -x^4 \sin(x^2 y)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (2xy \cos(x^2 y)) &= 2y \cos(x^2 y) + 2xy (-\sin(x^2 y)) 2xy = \\ &= 2y \cos(x^2 y) - 4x^2 y^2 \sin(x^2 y) \end{aligned}$$

Quindi le forme differenziali non è chiusa.

Quindi non è esatta

Esercizio 5

Una parametrizzazione di γ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1);$$

si ha quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \cos t \sin t + t^2 \cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{t^2 + 2}$$

Si ha quindi

$$\text{length}(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt$$

Poniamo $t = \sqrt{2} \operatorname{sh} u$; si ha $\frac{dt}{du} = \sqrt{2} \operatorname{ch} u$.

Per $t=0$ si ha $u=0$; per $t=2\pi$ si ha $u = \operatorname{Arghsh} \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi)$

Si ha quindi

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2 + 2} dt = \int_0^{\operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi)} \sqrt{2 \operatorname{sh}^2 u + 2} \sqrt{2} \operatorname{ch} u du =$$

$$= 2 \int_0^{\operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi)} \sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} \operatorname{ch} u du =$$

$$= 2 \int_0^{\operatorname{Arghsh} \frac{2\pi}{\sqrt{2}}} \operatorname{ch}^2 u du =$$

$$= 2 \int_0^{\operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi)} \frac{\operatorname{ch}(2u) + 1}{2} du =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(2u) + u \right]_0^{\operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi)} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2 \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi)) + \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi) =$$

$$= \operatorname{sh} \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi) \operatorname{ch} \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi) + \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2}\pi) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2\pi} \sqrt{1 + 2\pi^2} + \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2\pi}) = \\
&= \sqrt{2\pi} \sqrt{1 + 2\pi^2} + \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2\pi}) = \\
&= \pi \sqrt{2 + 4\pi^2} + \operatorname{Arghsh}(\sqrt{2\pi})
\end{aligned}$$

Esercizio 6

Sia

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$$

I punti di S sono dati da

$$(x, y, z) = u(2, 2, 3) + v(-1, 2, 4) + (1-u-v)(0, 0, 0)$$

al variare di (u, v) in T .

Una parametrizzazione di S non orientata
 è quindi la funzione φ

$$\begin{cases}
x = 2u - v \\
y = 2u + 2v \\
z = 3u + 4v
\end{cases}, \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ si ha.

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si ha } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 > 0$$

Quindi φ è concorde con l'orientazione di S

Si ha quindi

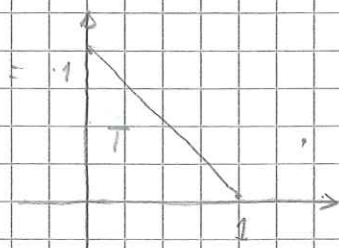
$$\iint_S x \, dx \wedge dy + y \, dz \wedge dx =$$

$$= \iint_T \left((2u-v) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (2u+2v) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) du dv =$$

$$= \iint_T \left((2u-v) 6 + (2u+2v) (-11) \right) du dv =$$

$$= \iint_T (12u - 6v - 22u - 22v) du dv =$$

$$= \iint_T (-10u - 28v) du dv = -2 \iint_T (5u + 14v) du dv =$$



Sehe $p_2(T) = [0, 1]$ e

$\forall u \in [0, 1] \quad T(u) = [0, 1-u]$

Sehe quadri:

$$-2 \iint_T (5u + 14v) du dv =$$

$$= -2 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (5u + 14v) dv \right) du \right) =$$

$$= -2 \left(\int_0^1 \left[5uv + 7v^2 \right]_0^{1-u} du \right) =$$

$$= -2 \int_0^1 \left(5u(1-u) + 7(1-u)^2 \right) du =$$

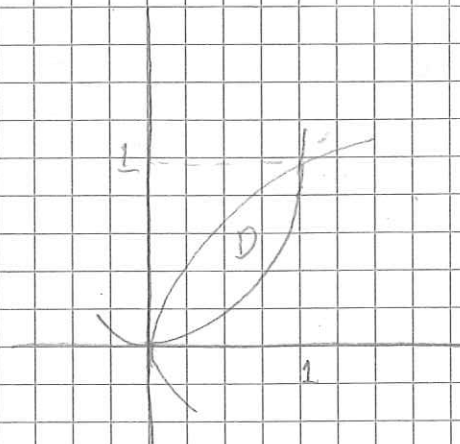
$$= -2 \int_0^1 (5u - 5u^2 + 7 - 14u + 7u^2) du$$

$$= -2 \int_0^1 (2u^2 - 9u + 7) du$$

$$= -2 \left[\frac{2}{3} u^3 - \frac{9}{2} u^2 + 7u \right]_0^1 = - \left(\frac{4}{3} - 9 + 14 \right) =$$

$$= - \left(\frac{4}{3} + 5 \right) = - \frac{19}{3}$$

Esercizio 7



a) Sia $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo assoluti di f

Per ogni $(x,y) \in D$ si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0$

Si ha quindi

$$E \cap D = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2, 0 < x < 1 \}$$

$$F_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2, 0 < y < 1 \}$$

$$F_3 = \{ (0,0) \}$$

$$F_4 = \{ (1,1) \}$$

$$\text{Si ha } F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x - y$$

Sia

$$g: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x^2 - y$$

F_1 è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y) = 0$

Sia $(x, y) \in E \cap F_1$; per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{grad } g(x, y)$$

cioè tale che

$$(1, -1) = \lambda (2x, -1)$$

Sicché quindi

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = -\lambda \\ y = x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Sicché $\lambda = 1$; quindi $x = \frac{1}{2}$; quindi $y = \frac{1}{4}$; si

trova il punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Sicché quindi

$$E \cap F \subset \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

Sia ora

$$g: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x - y^2$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazioni cartesiane $g(x, y) = 0$

Sia $(x, y) \in E \cap F_2$; per il teorema sui moltiplicatori

di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y),$$

cioè tale che

$$(1, -1) = \lambda (1, -2y)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ -1 = -2\lambda y \\ x = y^2 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

Si ha $1 = 2y$; quindi $y = \frac{1}{2}$; quindi $x = \frac{1}{4}$

Si trova il punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Si ha quindi

$$E \cap F_2 \subset \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right), (0, 0), (1, 1) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(1, 1) = 0$$

Si ha quindi $\max(f) = \frac{1}{4}$, $\min(f) = -\frac{1}{4}$

Esercizio 8

L'equazione differenziale è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Le soluzioni sono $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi:

$$\varphi_1(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \quad \varphi_2(x) = e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Poiché 1 non è soluzione dell'equazione caratteristica esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = (A + Bx)e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Se ha

$$\psi'(x) = B e^x + (A + Bx)e^x = (A + B + Bx)e^x$$

$$\psi''(x) = B e^x + (A + B + Bx)e^x = (A + 2B + Bx)e^x$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$(A + 2B + Bx)e^x - (A + B + Bx)e^x + (A + Bx)e^x = (1 - \alpha + x)e^x$$

cioè se e solo se

$$A + B + Bx = 1 - \alpha + x$$

quindi se e solo se

$$\begin{cases} B=1 \\ A+B=1-\alpha \end{cases} ; \text{ quindi se e solo se } \begin{cases} B=1 \\ A=-\alpha \end{cases}$$

Si ha quindi

$$v(x) = (-\alpha + x) e^x$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (-\alpha + x) e^x$$

Si ha

$$y'(x) = \frac{1}{2} c_1 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^x + (-\alpha + x) e^x$$

La funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{2}\alpha} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) + c_2 e^{\frac{1}{2}\alpha} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) = 0 \\ \frac{1}{2} c_1 e^{\frac{1}{2}\alpha} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} c_1 e^{\frac{1}{2}\alpha} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) + \frac{1}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}\alpha} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 e^{\frac{1}{2}\alpha} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) + e^\alpha = 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) = 0 \\ \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\alpha} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}\alpha} \left(c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) - c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) \right) = 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}x} \left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) = 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se

$$\begin{cases} C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = 0 \\ C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = 0 \end{cases}$$

è un sistema lineare omogeneo di matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{pmatrix}$$

che

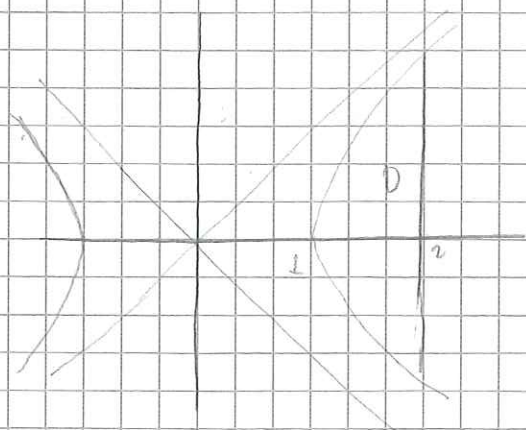
$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \end{vmatrix} = -\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = -1 \neq 0$$

quindi in che $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$

La soluzione del problema di Boundary è quindi

$$y(x) = (-x + x)e^x$$

Esercizio 9



$$\text{Si ha } D_1(D) = [1, 2]$$

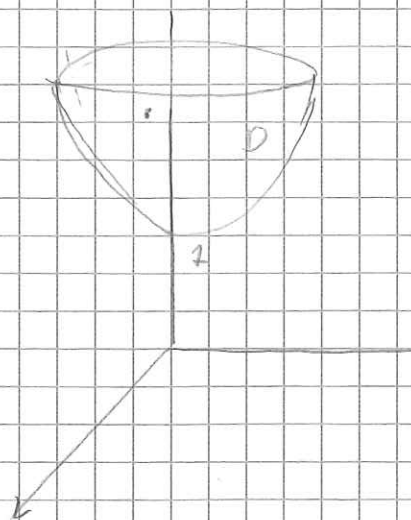
e per ogni $x \in [1, 2]$

$$D(x) = [-\sqrt{x^2 - 1}, \sqrt{x^2 - 1}]$$

siehe qundli.

$$\begin{aligned}
 \iint_D x \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} x \, dy \right) dx = \\
 &= \int_1^2 x \left(\int_{-\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} dy \right) dx = \int_1^2 x \cdot 2\sqrt{x^2-1} \, dx \\
 &= \int_1^2 \sqrt{x^2-1} (2x) \, dx = \\
 &= \left[\frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{27} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Übung 9



siehe $p_3(D) = [1, 2]$

und per ogni $z \in [1, 2]$ vale

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq z^2 - 1\}$$

siehe qundli.

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_1^2 \left(\iint_{D(z)} dx \, dy \right) dz = \int_1^2 \text{mis}(D(z)) \, dz = \int_1^2 \pi(z^2 - 1) \, dz$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} z^3 - z \right]_1^2 = \pi \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{4}{3} \pi$$