Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 1

[1]. (***) **Definizione di forma differenziale chiusa.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i \, dx_i$ una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; si dice che ω è chiusa se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sul problema di Cauchy per un'equazione a variabili separate.** Siano I, J intervalli non banali di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(\forall y \in J)\ g(y) \neq 0$; siano f, g continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in J$; allora il problema di Cauchy $\begin{cases} g(y)y' = f(x) \\ y_(x_0) = y_0 \end{cases}$ ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $x_0 \in I$; siano $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema di Cauchy (scrivere il problema di Cauchy) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione della misura rispetto ad una sottovarietà utilizzando il graamiano.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; sia $D \subset \mathbf{R}^N$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha (esprimere la misura di A rispetto alla varietà utilizzando il graamiano) $\mathrm{mis}_m(A) = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Determinate (se esistono), gli estremanti relativi della funzione $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + xy + y^2$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. ** Enunciare e dimostrare il teorema sull'integrale su traiettoria di una forma differenziale esatta.
5. * Dare un esempio di una forma differenziale chiusa e non esatta. Dimostrare che tale forma non è esatta.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 2

[1]. (***) **Definizione di integrale di una funzione di Riemann.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f \in \mathcal{R}(I)$; allora l'integrale, $\int_I f$ è ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo del differenziale.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; si $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^1; sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1; allora si ha $\int_\varphi df = \ldots$
RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia f una primitiva di ω; sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; allora si ha $\int_\varphi \omega = \ldots$
RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di traiettoria.** Una traiettoria di $\mathbf{R}^N$ è una funzione ...
RISPOSTA

[5]. (E) Determinare una base per lo spazio tangente alla sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ definita dalla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^3 \end{cases} \quad , \; t \in \mathbf{R}$$

nel punto corrispondente al valore $t = 1$ del parametro.
RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Riemann su intervalli di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione integrale di punto iniziale x_0.
2. *** Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
3. * Dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.
4. *** Enunciare e dimostrare il teorema relativo alla formula di Leibniz-Newton.
5. * Enunciare il teorema sull'integrale di Riemann sul prodotto cartesiano di due intervalli.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 3

[1]. (***) **Definizione di funzione integrale.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; supponiamo che per ogni $a, b \in I$, con $a < b$ sia $f|[a,b] \in \mathcal{R}([a,b])$; sia $x_0 \in I$; allora la funzione integrale di f di punto iniziale x_0 è la funzione ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si chiama equazione differenziale di forma normale di funzione incognita $y(x)$ corrispondente a f l'equazione differenziale di incognita $y(x)$, ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema del differenziale totale (condizione sufficiente per la differenziabilità).** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; ...
RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di integrale di Lebesgue di una funzione continua positiva su un compatto** Sia K un compatto di $\mathbf{R}^N$; sia $f : K \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f continua; sia $f \geq 0$; allora l'integrale di Lebesgue di f è ...
RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y'' = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di campo di vettori. Dare l'esempio fondamentale di campo di vettori.
2. * Scrivere l'espressione canonica di una forma differenziale. Spiegare come viene fuori la forma canonica.
3. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
4. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
5. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 4

[1]. (***) **Teorema sulle soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n non omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b continue; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; sia ψ una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x)$; allora ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla condizione sufficiente per un punto di massimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di integrale di una m-forma.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia ω una m-forma differenziale su A; sia $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq N} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m}$; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m parametrizzabile orientata; sia D un aperto di $\mathbf{R}^m$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione positiva di V; sia $M \subset V$; sia M m-misurabile; sia $P = \varphi^{-1}(M)$; sia ω m-misurabile su M; sia ω m-integrabile su M; allora si pone $\int_M \omega = \ldots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Espressione scalare di un sistema differenziale lineare.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $a : I \longrightarrow \mathbf{M}_N(\mathbf{R})$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}^N$; siano a, b continue; esprime il sistema scritto vettorialmente $y' = a(x)y + b(x)$ in forma scalare.

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di forme differenziali: $\int_\Gamma x^2 dx$ dove Γ è l'arco $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ con orientazione tale che $(1,0)$ è il punto iniziale e $(-1,0)$ è il punto finale.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di prodotto vettoriale di $N-1$ vettori di $\mathbf{R}^N$. Esplicitare la definizione in $\mathbf{R}^3$.
2. * Enunciare il teorema sul prodotto misto (prodotto scalare fra un vettore ed un prodotto vettoriale).
3. ** Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme misurabile di una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
4. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulla espressione dell'integrale di una funzione misurabile positiva su una curva differenziale parametrizzabile.
5. ** Calcolare la lunghezza di una elica circolare.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 5

[1]. (***) **Teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli di funzioni misurabili positive con proiezione del dominio sul piano xy.** Sia $A \subset \mathbf{R}^3$; sia A misurabile; sia $p_{1,2}(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione di (scrivere l'equazione differenziale) ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di insieme stellato.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è stellato se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; si dice che V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m se esiste D aperto di $\mathbf{R}^m$, se esiste $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$ tale che ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale curvilineo: $\int_\gamma (x+y)\, ds$ dove γ è il segmento $[(1,2),(3,1)]$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Data una sottovarietà differenziabile parametrizzabile orientata, quale orientazione viene assegnata allo spazio tangente?

2. * Data una curva (cioè una sottovarietà di dimensione 1) differenziabile parametrizzabile orientata, dire che cosa è il versore tangente e darne una espressione utilizzando una parametrizzazione.

3. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?

4. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata di una funzione in un punto; enunciare il teorema sulla matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 6

[1]. (***) **Definizione dei simboli di Gauss E, F, G.** Sia D un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ derivabile parzialmente rispetto agli indici 1 e 2; sia $(u,v) \in D$; allora i simboli di Gauss $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ sono dati da ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in \mathbf{R}$; allora la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è la funzione ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema di Poincaré.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di diffeomorfismo.** Siano A, B aperti di $\mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow B$; si dice che f è un diffeomorfismo se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di forme differenziali: $\int_\Gamma x^2 dx$ dove Γ è l'arco $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ con orientazione tale che $(1,0)$ è il punto iniziale e $(-1,0)$ è il punto finale.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema riguardante il rapporto fra differenziabilità e derivate direzionali.
3. * Enunciare il teorema dell'invertibilità locale.
4. * Dare la definizione di diffeomorfismo locale ed enunziare e dimostrare il teorema che caratterizza i diffeomorfismi locali.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 7

[1]. (***) **Definizione di funzione differenziabile in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è differenziabile in a se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale curvilineo di una forma differenziale esatta su una traiettoria chiusa.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria in A di classe C^1 a tratti; sia φ una traiettoria chiusa; allora si ha ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; allora φ è soluzione del problema di Cauchy ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di funzione di classe C^0.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è di classe C^0 se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{2-3x}\, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori finiti.
2. *** Enunciare il teorema riguardante il cambiamento di variabile negli integrali di Lebesgue.
3. * Definire il cono di base E e vertice (x_0, y_0, z_0) e calcolarne il volume.
4. ** Calcolare il volume della regione limitata da un ellissoide.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 8

[1]. (***) **Teorema sull'espressione dell'incremento di una funzione differenziabile.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; allora ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della differenziabilità in un punto attraverso l'espressione dell'incremento della funzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora f è differenziabile in a se e solo se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema di Poincaré.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω di classe C^1; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di diametro di una scomposizione.** Sia $I \in \mathrm{I}_{R^N}$; sia σ una scomposizione di I; allora il diametro $\delta(\sigma)$ di σ è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x}{x^2-1}\, dx \,.$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
2. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
3. ** Dare la definizione di insieme stellato rispetto ad un punto. Dare la definizione di insieme stellato.
4. ** Enunciare il teorema di Poincaré.
5. * Cosa significa forma differenziale localmente esatta? Come vengono fuori?

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 9

[1]. (***) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare d'ordine n.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione differenziale lineare d'ordine n (scrivere l'equazione) ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sul problema di Cauchy per un'equazione a variabili separate.** Siano I, J intervalli non banali di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(\forall y \in J)\ g(y) \neq 0$; siano f, g continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in J$; allora il problema di Cauchy $\begin{cases} g(y)y' = f(x) \\ y_(x_0) = y_0 \end{cases}$ ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di equazione caratteristica di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$; allora l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale lineare (scrivere l'equazione differenziale) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di scelta relativa ad una scomposizione.** Sia $I \in_{R^N}$; sia σ una scomposizione di I; sia $\xi : \sigma \longrightarrow \mathbf{R}^N$; si dice che ξ è una scelta relativa a σ se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare $\frac{d}{dx} \int_x^0 \sin t^2 \, dt$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Quale è una base dello spazio vettoriale $L(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$.
2. *** Dare la definizione di differenziale di una funzione scalare in un punto.
3. *** Quale espressione ha $df(a)(h)$? Spiegare il motivo.
4. ** Esprimere $df(a)(h)$ attraverso un prodotto scalare.
5. * Quale è il vettore associato al differenziale? Spiegare il motivo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 10

[1]. (***) **Teorema sulla formula di Leibniz-Newton.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f continua; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla condizione necessaria per un punto di minimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di spazio normale ad una sottovarietà differenziale in un punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m; sia $x_0 \in V$; allora lo spazio normale a V in x_0 è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di funzione di classe C^0.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è di classe C^0 se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 \sin^3 x \cos x \, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale lineare d'ordine n.
2. * Spiegare e scrivere il sistema lineare equivalente ad un'equazione differenziale lineare d'ordine n.
3. *** Dare la definizione di soluzione di un problema di Cauchy per una equazione differenziale lineare d'ordine n.
4. ** Enunciare il teorema fondamentale sul problema di Cauchy per una equazione differenziale lineare d'ordine n.
5. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulle soluzioni del tipo $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ di una equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea a coefficienti costanti.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 11

[1]. (***) **Definizione di derivata parziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $k = 1, 2, \ldots, N$; sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la derivata parziale di f secondo l'indice k in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $x_0 \in I$; sia $y_0 \in \mathbf{R}$; allora la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ è la funzione ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che T è una trasformazione lineare se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di insieme sconnesso.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; si dice che A è sconnesso se $ldots$.

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^{2x+3}\, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Sottovarietà differenziali di $\mathbf{R}^N$. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Enunciare il teorema su come una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ di dimensione m può essere localmente definita da una equazione cartesiana.
2. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e derivata.
3. *** Dare la definizione di trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.
4. * Dare la definizione di matrice di una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^N$ a $\mathbf{R}^M$.
5. *** Enunciare il teorema riguardante la matrice della derivata.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 12

[1]. (***) **Definizione di funzione differenziabile in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è differenziabile in a se ...
RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di derivabilità secondo una direzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; si dice che f è derivabile secondo la direzione e in a se ...
RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla espressione canonica di una forma differenziale (cioè mediante le forme differenziali dx_i).** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; sia F il campo associato ad ω; allora si ha $\omega = \ldots$
RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla caratterizzazione di una forma bilineare simmetrica definita negativa attraverso la sua matrice.** (Considerando tutti i minori principali.) Sia $T : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica; sia $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,N}$ la matrice di T; allora T è definita negativa se e solo se ...
RISPOSTA

[5]. (E) Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow g(xy, x^2 + y^2, x)$, dove $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1; trovare le derivate parziali di f, esprimendole attraverso le derivate di g.
RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni implicite. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di soluzione di un'equazione implicita $f(x, y) = 0$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
2. * Dare la definizione di soluzione massimale di un'equazione implicita $f(x, y) = 0$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
3. ** Dare la definizione di soluzione di un problema $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
4. ** Enunciare il teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
5. *** Dare la definizione di derivabilità e di derivata direzionale.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 13

[1]. (***) **Definizione di somma inferiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma inferiore di f, $s(f, \sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla espressione canonica di una forma differenziale (cioè mediante le forme differenziali dx_i).** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia ω una forma differenziale su A; sia F il campo associato ad ω; allora si ha $\omega = \ldots$

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sull'espressione dell'integrale di una funzione su una ipersuperficie cartesiana.** Sia $N \geq 2$; sia $D \subset \mathbf{R}^{N-1}$; sia D aperto; sia $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$; sia g di classe C^1; sia $V = \{(x, g(x)); x \in D\}$; sia $P \subset D$; sia P misurabile; sia $A = \{(x, g(x)); x \in P\}$; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile rispetto a V; sia $f \geq 0$; allora ha $\int_A f \, ds = \ldots$

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sui simplessi aperti come sottovarietà parametrizzabili.** Siano $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{R}^N$; la famiglia $(a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_m - a_0)$ sia linearmente indipendente; sia $T = \{t \in \mathbf{R}^m; t_1, t_2, \ldots, t_m > 0, \sum_{i=1}^m t_i < 1\}$; sia $V = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{Arcsin}\, x \, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi su un aperto e gradiente.
2. * Dare la definizione di omeomorfismo e di diffeomorfismo
3. ** Dare la definizione di coordinate polari piane.
4. * Definire un diffeomorfismo legato alle coordinate polari piane.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 14

[1]. (***) **Definizione dei simboli di Gauss E, F, G.** Sia D un aperto di $\mathbf{R}^2$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ derivabile parzialmente rispetto agli indici 1 e 2; sia $(u,v) \in D$; allora i simboli di Gauss $E(u,v)$, $F(u,v)$, $G(u,v)$ sono dati da ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di spazio tangente ad una sottovarietà parametrizzabile differenziale in un punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m; sia $x_0 \in V$; sia D un aperto di $\mathbf{R}^m$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una parametrizzazione di V; sia $t_0 \in D$ tale che $\varphi(t_0) = x_0$; allora lo spazio tangente a V in x_0 è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla condizione necessaria per un punto di massimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di classe di equivalenza.** Sia A un insieme; sia $\mathcal{R}\{x,y\}$ una relazione di equivalenza in A; Indichiamo $\mathcal{R}\{x,y\}$ con $x \sim y$; sia $a \in A$; la classe di equivalenza $[a]$ è l'insieme ...

RISPOSTA

[5]. (E)

Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali:

$\int_\Gamma x dx + y dy$ dove Γ è la curva

$\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0\} \cup [(0,-1),(-1,0)] \cup [(-1,0),(0,1)]$ orientata in modo che $\vec{t}(1,0) = (0,-1)$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrazione di funzioni su sottovarietà di $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile positiva su un sottoinsieme misurabile di una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulla espressione dell'integrale di una funzione misurabile positiva su una curva differenziale parametrizzabile.
3. ** Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile integrabile su un sottoinsieme misurabile di una sottovarietà di dimensione m differenziale parametrizzabile.
4. ** Calcolare la lunghezza di una circonferenza.
5. * Calcolare l'area di una superficie conica.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 15

[1]. (***) **Teorema sull'espressione di un integrale di superficie.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 2; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 2-misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f 2-misurabile; sia $f \geq 0$; sia $D \subset \mathbf{R}^2$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione regolare di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha $\int\int_A f\, ds = \dots$

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione delle trasformazioni lineari mediante le matrici.** Sia $T : \mathbf{R}^N \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora T è una trasformazione lineare se e solo se esiste ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; allora φ è soluzione del problema di Cauchy ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di cono.** Sia $E \in \mathrm{M}_{R^2}$; sia $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$; sia $z_0 \geq 0$; si chiama cono di base E e di vertice $(x_0, y_0.z_0)$ l'insieme ...

RISPOSTA

[5]. (E) Trasformare il seguente integrale mediante cambiamento di variabile ponendo $\sqrt{x} = t$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\, dx \, .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Data una sottovarietà differenziabile parametrizzabile orientata, quale orientazione viene assegnata allo spazio tangente?
2. * Data una curva (cioè una sottovarietà di dimensione 1) differenziabile parametrizzabile orientata, dire che cosa è il versore tangente e darne una espressione utilizzando una parametrizzazione.
3. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
4. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata di una funzione in un punto; enunciare il teorema sulla matrice della derivata.

RISPOSTA