Analisi Matematica 2 - 6/6/'16 - Compito 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z, t) = (xy)^{zt} \; ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S (x - y + z)\, ds \; ,$$

   dove S è il triangolo di vertici $(1, 3, 4)$, $(4, 2, 1)$, $(5, 7, 1)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla varietà (superficie) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = 2u - v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} \quad , \qquad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

   nel punto corrispondente a $(u, v) = (1, 1)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_\Gamma x^2 y \, dy \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; (x-1)^2 + y^2 = 1, \ x \geq 1, y \geq 0 \right\} \ ,$$

con orientazione per la quale $(2, 0)$ sia il punto iniziale e $(1, 1)$ il punto finale.

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$, per $n \neq 1$, o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, \ 0 \leq z \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 3x - 2y + z \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 1 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di una funzione razionale non figurante negli integrali indefiniti di base.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 4y' = x + 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{1}{4},\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D \frac{xy + y^2}{1 + x + y}\, dxdy \,,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \geq x,\ y \geq -x,\ y \leq 1\}\ .$$

Suggerimento. Si usino le formule di riduzione in modo da non dovere spezzare l'integrale in due integrali; si porti fuori dall'integrale interno ciò che è costante rispetto alla variabile di integrazione; si proceda con i metodi di integrazione delle funzioni razionali; nel calcolo dell'integrale esterno interviene poi un'integrazione per parti e di nuovo l'integrazione delle funzioni razionali.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y + 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 6/6/'16 - Compito 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z, t) = (zt)^{xy} ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S (y - x - z)\, ds ,$$

   dove S è il triangolo di vertici $(-1, 0, 2)$, $(3, 4, 1)$, $(2, -3, 4)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla varietà (superficie) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u^2 - 2v^2 \\ y = u - v \\ z = 2u - 3v \end{cases} , \qquad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

   nel punto corrispondente a $(u, v) = (1, 1)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_\Gamma xy^2\,dx\ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2; x^2+(y-1)^2=1,\ x\geq 0, y\geq 1\right\}\ ,$$

con orientazione per la quale $(1,1)$ sia il punto iniziale e $(0,2)$ il punto finale.

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$, per $n\neq 1$, o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+z^2\leq(1-y)^2,\ 0\leq y\leq 1\}\longrightarrow\mathbf{R}, (x,y,z)\longrightarrow 3x+y-2z\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{\sqrt{x-1}} \\ y(2) = 1 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di una funzione razionale non figurante negli integrali indefiniti di base.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - y' = 2x + 3 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D \frac{xy + x^2}{1 + x + y}\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x \geq y,\ x \geq -y,\ x \leq 1\} \ .$$

Suggerimento. Si usino le formule di riduzione in modo da non dovere spezzare l'integrale in due integrali; si porti fuori dall'integrale interno ciò che è costante rispetto alla variabile di integrazione; si proceda con i metodi di integrazione delle funzioni razionali; nel calcolo dell'integrale esterno interviene poi un'integrazione per parti e di nuovo l'integrazione delle funzioni razionali.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq x + z + 1\} \ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 6/6/'16 - Compito 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z, t) = (yz)^{xt} \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\int\int_S (z - x - y)\, ds \ ,$$

   dove S è il triangolo di vertici $(3, 0, 1)$, $(-2, 4, -3)$, $(3, 1, 5)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla varietà (superficie) di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u - 2v \\ y = 2u^2 - v^2 \\ z = 2u - v \end{cases} \ , \qquad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

   nel punto corrispondente a $(u, v) = (1, 1)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_\Gamma x^2 y\, dy \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2; (x+1)^2 + y^2 = 1,\ x \geq -1,\ y \geq 0\right\} \ ,$$

con orientazione per la quale $(0,0)$ sia il punto iniziale e $(-1,1)$ il punto finale.

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$, per $n \neq 1$, o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ y^2 + z^2 \leq (1-x)^2,\ 0 \leq x \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow x + 3y - 2z \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{\sqrt{x+1}} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di una funzione razionale non figurante negli integrali indefiniti di base.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 9y' = 36x \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D \frac{xy - y^2}{1 + x - y}\, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ y \le x,\ y \le -x,\ y \ge -1\} \ .$$

Suggerimento. Si usino le formule di riduzione in modo da non dovere spezzare l'integrale in due integrali; si porti fuori dall'integrale interno ciò che è costante rispetto alla variabile di integrazione; si proceda con i metodi di integrazione delle funzioni razionali; nel calcolo dell'integrale esterno interviene poi un'integrazione per parti e di nuovo l'integrazione delle funzioni razionali.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1, 0 \le x \le y + z + 1\} \ .$$

Svolgimento e risposta.