Analisi Matematica 2 - 6/6/'16 - Compito 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da
$$f(x, y, z, t) = (xy)^{zt} ;$$
   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma
$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow T\{h\} .$$
   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie
$$\int\int_S (x - y + z)\, ds ,$$
   dove S è il triangolo di vertici $(1, 3, 4)$, $(4, 2, 1)$, $(5, 7, 1)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 2) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla varietà (superficie) di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = u + v \\ y = 2u - v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} , \qquad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$
   nel punto corrispondente a $(u, v) = (1, 1)$.

   Svolgimento e risposta.

2 4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forme differenziali

$$\int_{\Gamma} x^2 y \, dy \, ,$$

dove Γ è l'arco semplice orientato

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; (x-1)^2 + y^2 = 1, \, x \geq 1, y \geq 0\} \, ,$$

con orientazione per la quale $(2, 0)$ sia il punto iniziale e $(1, 1)$ il punto finale.

Si chiede di non usare formule che diano direttamente le primitive di $\sin^n t$ o di $\cos^n t$, per $n \neq 1$, o formule simili.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \; x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, \, 0 \leq z \leq 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow 3x - 2y + z \, ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}} \\ y(1) = 1 \end{cases} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di una funzione razionale non figurante negli integrali indefiniti di base.

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 4y' = x + 1 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{1}{4},\ y''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio (non è necessario semplificare il risultato):

$$\int\int_D \frac{xy+y^2}{1+x+y}\,dxdy\,,$$

dove

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2;\ y\geq x,\ y\geq -x,\ y\leq 1\}\,.$$

Suggerimento. Si usino le formule di riduzione in modo da non dovere spezzare l'integrale in due integrali; si porti fuori dall'integrale interno ciò che è costante rispetto alla variabile di integrazione; si proceda con i metodi di integrazione delle funzioni razionali; nel calcolo dell'integrale esterno interviene poi un'integrazione per parti e di nuovo l'integrazione delle funzioni razionali.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Determinare il volume del seguente insieme

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq x+y+1\}\,.$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha

$$\operatorname{dom}(f) = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 , \ x y > 0 \}$$

b) Per ogni $(x,y,z,t) \in \operatorname{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z,t) = zt\,(xy)^{zt-1}\,y = y\,zt\,(xy)^{zt-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z\,t) = zt\,(xy)^{zt-1}\,x = x\,zt\,(xy)^{zt-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z,t) = (xy)^{zt}\log(xy)\cdot t = t\,(xy)^{zt}\log(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,z,t) = (xy)^{zt}\log(xy)\,z = z\,(xy)^{zt}\log(xy)$$

Si ha quindi

$$\operatorname{grad} f(x,y,z,t) = \Big(y\,zt\,(xy)^{zt-1},\ x\,zt\,(xy)^{zt-1},\ t\,(xy)^{zt}\log(xy),$$
$$z\,(xy)^{zt}\log(xy) \Big)$$

c) Si ha

$$df(x,y,z,t) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (h_1, h_2, h_3, h_4) \longrightarrow$$

$$y\,zt\,(xy)^{zt-1}h_1 + x\,zt\,(xy)^{zt-1}h_2 + t\,(xy)^{zt}\log(xy)\,h_3 + z\,(xy)^{zt}\log(xy)\,h_4$$

d) Si ha

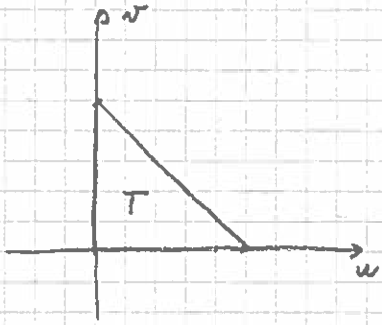
$$df(x,y,z,t) = y\,zt\,(xy)^{zt-1}\,dx + x\,zt\,(xy)^{zt-1}\,dy +$$

$$t\,(xy)^{zt}\log(xy)\,dz + z\,(xy)^{zt}\log(xy)\,dt$$

Esercizio 2

Sia

$$T = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 ;\ u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \leq 1 \}$$



I punti di S sono dati da

$$(x,y,z) = u\,(1,3,4) + v\,(4,2,1) + (1-u-v)\,(5,7,1)$$

al variare di (u,v) in T

Si ha

$$\begin{cases} x = u + 4v + 5(1-u-v) = u + 4v + 5 - 5u - 5v = -4u - v + 5 \\ y = 3u + 2v + 7(1-u-v) = 3u + 2v + 7 - 7u - 7v = -4u - 5v + 7 \\ z = 4u + v + 1 - u - v = 3u + 1 \end{cases}$$

Una parametrizzazione di S è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = -4u - v + 5 \\ y = -4u - 5v + 7 \\ z = 3u + 1 \end{cases} , \quad (u,v) \in T$$

Per ogni $(u,v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u,v) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$E(u,v) = 16 + 16 + 9 = 41$$

$$F(u,v) = 4 + 20 = 24$$

$$G(u,v) = 1 + 25 = 26$$

$$\sqrt{E(u,v)\,G(u,v) - (F(u,v))^2} = \sqrt{41 \cdot 26 - 24^2} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}$$

Si ha quindi

$$\iint_S (x-y+z)\,dS = \iint_T (-4u - v + 5 + 4u + 5v - 7 + 3u + 1)\, 7\sqrt{10}\, du\,dv =$$

$$= 7\sqrt{10} \iint_T (3u + 4v - 1)\, du\,dv$$

Si ha $p_1(T) = [0,1]$ e per ogni $u \in [0,1]$

$T(u) = [0, 1-u]$. L'espressione sopra è quindi uguale a

$$7\sqrt{10} \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (3u + 4v - 1)\, dv \right) du =$$

$$= 7\sqrt{10} \int_0^1 \Big[3uv + 2v^2 - v \Big]_0^{1-u} du =$$

$$= 7\sqrt{10} \int_0^1 \left(3u(1-u) + 2(1-u)^2 - 1 + u \right) du =$$

$$= 7\sqrt{10} \int_0^1 (3u - 3u^2 + 2 - 4u + 2u^2 - 1 + u)\, du =$$

$$= 7\sqrt{10} \int_0^1 (-u^2 + 1)\, du = 7\sqrt{10} \left[-\frac{1}{3}u^3 + u \right]_0^1 =$$

$$= 7\sqrt{10} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = 7\sqrt{10}\, \frac{2}{3} = \frac{14}{3}\sqrt{10}$$

Esercizio 3

Chiamata φ la parametrizzazione si ha

$$\varphi(1,1) = (2, 1, 0)$$

Per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = (1, 2, 2u), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (1, -1, -2v)$$

Si ha quindi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(1,1) = (1,2,2) \quad , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) = (1,-1,-2)$$

Una base dello spazio tangente alla sottovarietà in $(2,1,0)$ è quindi

$$((1,2,2),(1,-1,-2))$$

Delle equazioni parametriche dello spazio tangente sono quindi

$$(x,y,z) = u(1,2,2) + v(1,-1,-2) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

cioè

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = 2u-v \\ z = 2u-2v \end{cases} \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Delle equazioni parametriche del piano tangente sono quindi

$$(x,y,z) = u(1,2,2) + v(1,-1,-2) + (2,1,0)$$

cioè

$$\begin{cases} x = u+v+2 \\ y = 2u-v+1 \\ z = 2u-2v \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Delle equazioni cartesiane del sottospazio normale sono quindi

$$\begin{cases} ((x,y,z) \mid (1,2,2)) = 0 \\ ((x,y,z) \mid (1,-1,-2)) = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} x+2y+2z = 0 \\ x-y-2z = 0 \end{cases}$$

Delle equazioni cartesiane della retta normale sono quindi

$$\begin{cases} \left((x,y,z) - (2,1,0) \mid (1,2,2) \right) = 0 \\ \left((x,y,z) - (2,1,0) \mid (1,-1,-2) \right) = 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Una parametrizzazione di Γ orientata è

$$\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Si ha quindi

$$\int_\Gamma x^2 y \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos t)^2 \sin t \cos t \, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \left(1 + 2\cos t + \cos^2 t \right) \sin t \, dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \cos t \sin t \, dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t \, dt =$$

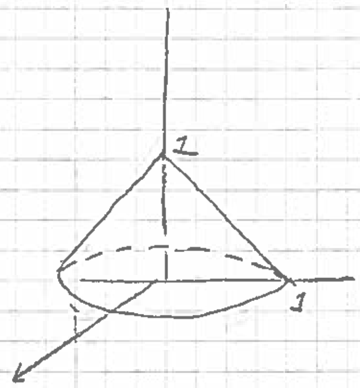
$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (-\sin t) dt - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t (-\sin t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t (-\sin t) dt =$$

$$= - \left[\frac{1}{2} \cos^2 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \left[\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{4} \cos^4 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{17}{12}$$

Esercizio 5

a) Sia $D = \text{dom}(f)$.



D è il cono di vertice $(0,0,1)$ e base il cerchio

$\{(x,y,0)\,;\, x,y \in R,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo.

b) Sia E l'insieme degli estremanti assoluti di f

Sia $(x,y,z) \in \mathring{D}$. Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3 \neq 0$

Si ha quindi

$E \cap \mathring{D} = \emptyset$

Sia

$F_1 = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, x^2+y^2 = (1-z)^2,\ 0<z<1\}$

$F_2 = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, z=0,\ x^2+y^2<1\}$

$F_3 = \{(x,y,z) \in R^3\,;\, z=0,\ x^2+y^4 = 1\}$

$F_4 = \{(0,0,1)\}$

Si ha

$Fr(D) = F_1 \cup F_2 \cup E_3 \cup F_4$

Sia

$g : \{(x,y,z) \in R^3;\ 0<z<1\} \to R,\ (x,y,z) \to x^2+y-(1-z)^2$

F_1 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 2 di equazioni cartesiane $g(x,y,z) = 0$.

Identifichiamo f con il suo prolungamento

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \to 3x - 2y + z$$

Se $(x,y,z) \in E \cap F_1$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z)$$

cioè tale che

$$(3, -2, 1) = \lambda \left(2x, 2y, 2(1-z) \right)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda(1-z) \\ x^2 + y^2 = (1-z)^2 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = -\frac{1}{\lambda}, \quad 1 - z = \frac{1}{2\lambda}$$

Quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2, \quad \text{cioè}$$

$$\frac{13}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^2}, \quad \text{cioè}$$

$13 = 1$; ciò è assurdo

Si ha quindi

$$E \cap F_1 = \emptyset$$

Sia

$h: \{(x,y,z) \in R^3; \quad x^2+y^2<1\} \to R, \quad (x,y,z) \to z$

F_2 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 2 di equazione cartesiana $h(x,y,z)=0$

Se $(x,y,z) \in E \cap F_2$, esiste $\lambda \in R$ tale che

grad $f(x,y,z) = \lambda$ grad $g(x,y,z)$

cioè tale che

$(3,-2,1) = \lambda(0,0,1)$

si ha $3=0$; ciò è assurdo; quindi si ha

$E \cap F_2 = \emptyset$

Sia

$K: R^3 \to R^2, \quad (x,y,z) \to (x^2+y^2-1, \; z)$

F_3 è una sottovarietà differenziale di R^3 di dimensione 1, di equazione cartesiana $K(x,y,z)=0$

Se $(x,y,z) \in E \cap F_3$ esistono $\lambda, \mu \in R$ tali che

grad $f(x,y,z) = \lambda$ grad $K_1(x,y,z) + \mu$ grad $K_2(x,y,z)$

cioè tale che

$(3,-2,1) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(0,0,1)$

si ha quindi

$$\begin{cases} 3 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 1 = \mu \\ x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Per $\lambda=0$ il sistema non ha soluzioni. Supponiamo $\lambda\neq 0$. Si ha

$$x=\frac{3}{2\lambda} \qquad y=-\frac{1}{\lambda}$$; quindi

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2=1;$$ cioè

$$\frac{13}{4\lambda^2}=1;$$ cioè $\lambda^2=\frac{13}{4}$; cioè $\lambda=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

Per $\lambda=\frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x=\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{3}{13}\sqrt{13}$ e

$y=-\frac{2}{\sqrt{13}}=-\frac{2}{13}\sqrt{13}$, $z=0$

Si trova il punto $\left(\frac{3}{13}\sqrt{13},-\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right)$

Per $\lambda=-\frac{\sqrt{13}}{2}$ si ha $x=-\frac{3}{13}\sqrt{13}$, $y=\frac{2}{13}\sqrt{13}$, $z=0$

Si trova il punto $\left(-\frac{3}{13}\sqrt{13},\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right)$

Si ha quindi

$$E\cap F_3\subset\left\{\left(\frac{3}{13}\sqrt{13},-\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right),\left(-\frac{3}{13}\sqrt{13},\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right)\right\}$$

Si ha quindi

$$E\subset\left\{\left(\frac{3}{13}\sqrt{13},-\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right),\left(-\frac{3}{13}\sqrt{13},\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right),(0,0,1)\right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{3}{13}\sqrt{13},-\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right)=\frac{9}{13}\sqrt{13}+\frac{4}{13}\sqrt{13}=\sqrt{13}$$

$$f\left(-\frac{3}{13}\sqrt{13},\frac{2}{13}\sqrt{13},0\right)=-\sqrt{13}$$

$$f(0,0,1)=1$$

Si ha quindi $\max(f)=\sqrt{13}$, $\min(f)=-\sqrt{13}$

Esercizio 6

L'equazione differenziale è a variabili separabili definite per $x \in]0,+\infty[$ e per $y \in \mathbb{R}$

L'equazione differenziale ha soluzione costante
$\psi:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \to 0$

Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy, il problema di Cauchy assegnato

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{\sqrt{x}} & , x>0, \quad y \in \mathbb{R} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

è equivalente al problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{\sqrt{x}} & , x>0, \; y>0 \\ y(1)=1 \end{cases} ;$$

quindi a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y^2} \, y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ y(1)=1 \end{cases}$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita di incognita $y(x)$ tale che $1 \in \operatorname{dom}(y)$

$$\int_1^y \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad , \quad x>0, \; y>0 \quad ; \quad \text{cioè}$$

$$\left[-\frac{1}{t}\right]_1^y = \int_1^x x^{-\frac{1}{2}}\,dx \quad , \quad x>0, \; y>0 \quad ; \quad \text{cioè}$$

$$-\frac{1}{y} + 1 = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^x \quad , \quad x>0, \; y>0 \; ; \quad \text{cioè}$$

$$-\frac{1}{y}+1 = 2(\sqrt{x}-1), \quad x>0,\ y>0; \quad \text{cioè}$$

$$-\frac{1}{y}+1 = 2\sqrt{x}-2, \quad x>0,\ y>0; \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{y} = 3-2\sqrt{x}, \quad x>0,\ y>0$$

Essendo $y>0$, si ha $3-2\sqrt{x}>0$; quindi

$2\sqrt{x}<3$; quindi $\sqrt{x}<\frac{3}{2}$; quindi $x<\frac{9}{4}$.

L'equazione implicita sopra è quindi equivalente a

$$\frac{1}{y} = 3-2\sqrt{x}, \quad 0<x<\frac{9}{4}, \quad y>0 \quad ; \quad \text{cioè}$$

$$y = \frac{1}{3-2\sqrt{x}}, \quad 0<x<\frac{9}{4}, \quad y>0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : \left]0, \frac{9}{4}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{1}{3-2\sqrt{x}}$$

Esercizio 7

L'equazione differenziale è lineare, a coefficienti costanti non omogenea

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è

$$\lambda^3 - 4\lambda = 0 \quad ; \quad \text{cioè}$$

$$\lambda(\lambda^2-4) = 0$$

Le soluzioni sono $0,\ 2,\ -2$, tutte semplici

Un sistema fondamentale di soluzione dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{2x}, \quad \varphi_3(x) = e^{-2x}$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = x(A + Bx)$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Si ha

$$\psi(x) = Ax + Bx^2$$

$$\psi'(x) = A + 2Bx$$

$$\psi''(x) = 2B$$

$$\psi'''(x) = 0$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$-4(A + 2Bx) = x + 1$; cioè se e solo se

$$\begin{cases} -8B = 1 \\ -4A = 1 \end{cases}, \quad \text{cioè} \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

Si ha quindi

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2$$

Si ha

$$y'(x) = 2c_2 e^{2x} - 2c_3 e^{-2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$$

$$y''(x) = 4c_2 e^{2x} + 4c_2 e^{-2x} - \frac{1}{4}$$

Quindi la funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

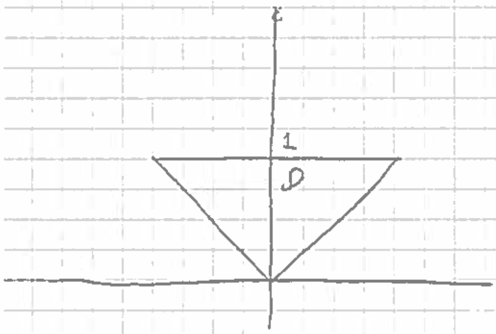
$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 - 2c_3 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} \\ 4c_2 + 4c_3 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \text{, cioè } \begin{cases} c_3 = c_2 \\ 4c_2 + 4c_2 = \frac{1}{4} \\ c_1 + c_2 + c_2 = 0 \end{cases} \text{, cioè}$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{1}{32} \\ c_3 = \frac{1}{32} \\ c_1 = -\frac{1}{16} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{32} e^{2x} + \frac{1}{32} e^{-2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2$$

Esercizio 8



Si ha $p_2(D) = [0,1]$ e per ogni $y \in [0,1]$

$D(y) = [-y, y]$

Si ha quindi

$$\iint_D \frac{xy + y^2}{1 + x + y} \, dx \, dy =$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \frac{xy + y^2}{1 + x + y} \, dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 \left(y \int_{-y}^{y} \frac{x + y}{1 + x + y} \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y \left(\int_{-y}^{y} \frac{1+x+y \;-1}{1+x+y} \, dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y \left(\int_{-y}^{y} \left(1 - \frac{1}{1+x+y}\right) dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 y \left[x - \log(1+x+y) \right]_{-y}^{y} dy =$$

$$= \int_0^1 y \left(y - \log(1+2y) + y \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y^2 - y \log(1+2y) \right) dy =$$

$$= 2 \int_0^1 y^2 dy - \int_0^1 y \log(1+2y) \, dy =$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 - \left(\left[\frac{1}{2} y^2 \log(1+2y) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} y^2 \frac{1}{1+2y} 2 \, dy = \right.$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \log 3 + \int_0^1 \frac{y^2}{1+2y} dy$$

Eseguendo la divisione $y^2 : (2y+1)$ si trova

$$y^2 = (2y+1)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}$$

Quindi si ha

$$\frac{y^2}{2y+1} = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{2y+1}$$

L'espressione sopra è quindi uguale a

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\log 3 + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{2y+1} \right) dy =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \log 3 + \left[\frac{1}{4} y^2 - \frac{1}{4} y + \frac{1}{8} \log(2y+1) \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \log 3 = \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \log 3$$

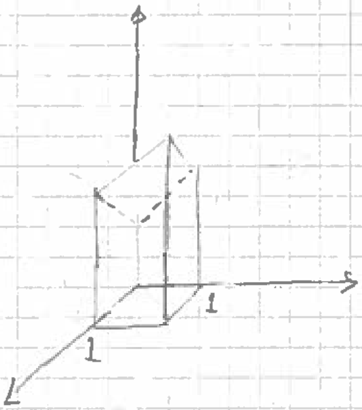
Esercizio 9

Si ha $p_{1,2}(D) = [0,1] \times [0,1]$

e per ogni $(x,y) \in p_{1,2}(D)$ si ha

$D_{(x,y)} = [0, x+y+1]$

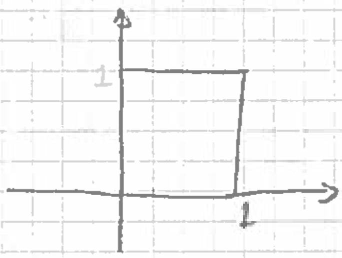
Si ha quindi



$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \left(\int_0^{x+y+1} dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} (x+y+1)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y+1)\,dy \right) dx =$$



$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 + y \right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} + 1 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$