Analisi Matematica 2 - 21/6/16 - Compito 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = (\sin(xy), \log(x+y^2), \mathrm{Arctg}(x+y^2)) \;;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \;.$$

   Risposta.

2. (p. 4) Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow g(2xy - z, x^2 z, \cos y) \;;$$

   (a) determinare $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ attraverso le derivate parziali, $D_1 g$, $D_2 g$, $D_3 g$, di g;

   (b) determinare $\operatorname{grad} f(1,0,3)$ attraverso le derivate parziali, $D_1 g$, $D_2 g$, $D_3 g$, di g;

   (c) determinare esplicitamente $\operatorname{grad} f(1,0,3)$ nel caso particolare di

$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (u,v,w) \longrightarrow uv + w \;.$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int\int_S \sqrt{z}\, ds \ ,$$

dove

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = x^2 + y^2,\ z \le 1\}\ .$$

Suggerimento. Se nello sviluppo dei calcoli, in un integrale compare fra altro $\sqrt{1+4\rho^2}$ si può procedere per sostituzione ponendo $\rho = \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\, t$. Si ricordi poi che $\mathrm{sh}(2z) = 2\,\mathrm{sh}\, z\, \mathrm{ch}\, z$ e che $\mathrm{sh}^2\, \frac{z}{2} = \frac{\mathrm{ch}\, z - 1}{2}$; nel caso servisse, si ricordi che $\mathrm{ch}^2\, \frac{z}{2} = \frac{\mathrm{ch}\, z+1}{2}$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma y\, dx \ ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \ge 0\right\}\ ,$$

orientata in modo che $(0,-2)$ sia il punto iniziale e $(0,2)$ il punto finale.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \ne 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1,\ x \ge 0\right\} \longrightarrow \mathbf{R},\ (x,y) \longrightarrow 2x + y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \log(x^2+y^2) - x^2 \ .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(6)} - y^{(5)} = 1 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 0, \ y'''(0) = 0, \ y^{(4)}(0) = 0, \ y^{(5)}(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y^2 \, dxdy \; ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 ; \; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 , \; x \geq 0 \right\} \; .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 ; \; 0 \leq x \leq 1 , \; 0 \leq y \leq 1 , \; 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \} \; .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 21/6/16 - Compito 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da
$$f(x,y) = (\log(x-y^2), \cos(x-y^2), \mathrm{Arctg}(xy)) \ ;$$
   (a) determinare il dominio naturale di f;
   (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
   (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma
$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   Risposta.

2. (p. 4) Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ differenziabile; sia
$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow g(x^2y, \cos z, 2xz - y) \ ;$$
   (a) determinare $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ attraverso le derivate parziali, D_1g, D_2g, D_3g, di g;
   (b) determinare $\operatorname{grad} f(1,3,0)$ attraverso le derivate parziali, D_1g, D_2g, D_3g, di g;
   (c) determinare esplicitamente $\operatorname{grad} f(1,3,0)$ nel caso particolare di
$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (u,v,w) \longrightarrow uw + v \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int\int_S \sqrt{1-z}\, ds \; ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\; z = 1 - x^2 - y^2,\, z \geq 0\} \; .$$

Suggerimento. Se nello sviluppo dei calcoli, in un integrale compare fra altro $\sqrt{1+4\rho^2}$ si può procedere per sostituzione ponendo $\rho = \frac{1}{2}\operatorname{sh} t$. Si ricordi poi che $\operatorname{sh}(2z) = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$ e che $\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{2}$; nel caso servisse, si ricordi che $\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z + 1}{2}$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_\Gamma x\, dy \; ,$$

dove Γ è l'arco semplice

$$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,\, y \geq 0\right\} \; ,$$

orientata in modo che $(2, 0)$ sia il punto iniziale e $(-2, 0)$ il punto finale.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\, y \geq 0\right\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x + 2y \; ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \log(x^2+y^2) - y^2 \; .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(6)} + y^{(5)} = -1 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 0, \; y^{(4)}(0) = 0, \; y^{(5)}(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x^2 \, dxdy \ ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2; \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1, \ y \ge 0 \right\} \ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\} \ .$$

Svolgimento e risposta.