

## Analisi Matematica 2 - 21/6/16 - Compito 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia  $f$  la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y) = (\sin(xy), \log(x + y^2), \operatorname{Arctg}(x + y^2)) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di  $f$ ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di  $f$  in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di  $f$  in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

**Risposta.**

2. (p. 4) Sia  $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$  differenziabile; sia

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y, z) \longrightarrow g(2xy - z, x^2z, \cos y) ;$$

- (a) determinare  $\operatorname{grad} f(x, y, z)$  attraverso le derivate parziali,  $D_1g, D_2g, D_3g$ , di  $g$ ;
- (b) determinare  $\operatorname{grad} f(1, 0, 3)$  attraverso le derivate parziali,  $D_1g, D_2g, D_3g$ , di  $g$ ;
- (c) determinare esplicitamente  $\operatorname{grad} f(1, 0, 3)$  nel caso particolare di

$$g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, (u, v, w) \longrightarrow uv + w .$$

**Svolgimento e risposta.**

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie (non è necessario semplificare il risultato)

$$\int \int_S \sqrt{z} \, ds ,$$

dove

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2, z \leq 1\} .$$

**Suggerimento.** Se nello sviluppo dei calcoli, in un integrale compare fra altro  $\sqrt{1 + 4\rho^2}$  si può procedere per sostituzione ponendo  $\rho = \frac{1}{2} \operatorname{sh} t$ . Si ricordi poi che  $\operatorname{sh}(2z) = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$  e che  $\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{2}$ ; nel caso servisse, si ricordi che  $\operatorname{ch}^2 \frac{z}{2} = \frac{\operatorname{ch} z + 1}{2}$ .

**Svolgimento e risposta.**

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di forma differenziale:

$$\int_{\Gamma} y \, dx ,$$

dove  $\Gamma$  è l'arco semplice

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x \geq 0 \right\} ,$$

orientata in modo che  $(0, -2)$  sia il punto iniziale e  $(0, 2)$  il punto finale.

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di  $\cos^n t$  o di  $\sin^n t$ , per  $n \neq 1$ .

**Svolgimento e risposta.**

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0 \right\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow 2x + y ,$$

(a) dire se  $f$  ammette massimo e se  $f$  ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di  $f$ .

**Svolgimento e risposta.**

6. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow \log(x^2 + y^2) - x^2 .$$

**Svolgimento e risposta.**

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(6)} - y^{(5)} = 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0, y^{(4)}(0) = 0, y^{(5)}(0) = 0 \end{cases}$$

**Svolgimento e risposta.**

4

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D y^2 \, dx dy ,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, x \geq 0 \right\} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di  $\cos^n t$  o di  $\sin^n t$ , per  $n \neq 1$ .

**Svolgimento e risposta.**

9. (p. 4) Calcolare il volume del seguente insieme:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\} .$$

**Svolgimento e risposta.**

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y^2 > 0\}$$

b) Per ogni  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left( \cos(xy) y, \frac{1}{x+y^2}, \frac{1}{1+(x+y^2)^2} \right) =$$

$$= \left( y \cos(xy), \frac{1}{x+y^2}, \frac{1}{1+x^2+2xy^2+y^6} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left( \cos(xy) \cdot x, \frac{1}{x+y^2} \cdot 2y, \frac{1}{1+(x+y^2)^2} \cdot 2y \right) =$$

$$= \left( x \cos(xy), \frac{2y}{x+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+2xy^2+y^6} \right)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) & x \cos(xy) \\ \frac{1}{x+y^2} & \frac{2y}{x+y^2} \\ \frac{1}{1+x^2+2xy^2+y^6} & \frac{2y}{1+x^2+2xy^2+y^6} \end{pmatrix}$$

c) Per ogni  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  si ha

$$f'(x, y): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (h_1, h_2) \longrightarrow$$

$$\left( y \cos(xy) h_1 + x \cos(xy) h_2, \frac{1}{x+y^2} h_1 + \frac{2y}{x+y^2} h_2, \right.$$

$$\left. \frac{1}{1+x^2+2xy^2+y^6} h_1 + \frac{2y}{1+x^2+2xy^2+y^6} h_2 \right)$$

## Übung 2

a) Siehe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_1 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) 2y + \\ + D_2 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) 2xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = D_1 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) 2x + \\ + D_3 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) (-\sin y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = D_1 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) (-1) + \\ + D_2 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) x^2$$

Siehe auch

$$\text{grad } f(x, y, z) = (2y D_1 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) + 2xz D_2 g(2xy - z, x^2 z, \cos y), \\ 2x D_1 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) - \sin y D_3 g(2xy - z, x^2 z, \cos y), \\ - D_1 g(2xy - z, x^2 z, \cos y) + x^2 D_2 g(2xy - z, x^2 z, \cos y))$$

b) Bei  $(x, y, z) = (1, 0, 3)$ , mit

$$g(2xy - z, x^2 z, \cos y) = (-3, 3, 1)$$

Siehe auch

$$\text{grad } f(1, 0, 3) = (6 D_2 g(-3, 3, 1), 2 D_1 g(-3, 3, 1), \\ - D_1 g(-3, 3, 1) + D_2 g(-3, 3, 1))$$

c) Siehe

$$D_1 g(u, v, w) = v$$

$$D_2 g(u, v, w) = u$$

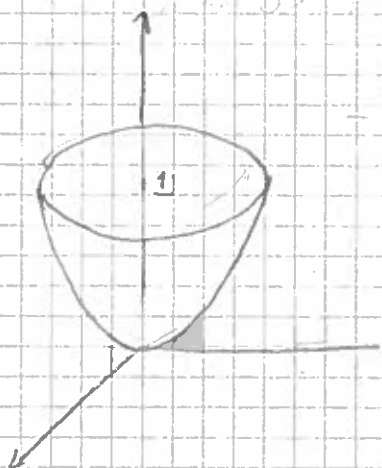
$$D_3 g(u, v, w) = 1$$

Si ha quindi

$$D_1 g(-3, 3, 1) = 3, \quad D_2 g(-3, 3, 1) = -3, \quad D_3 g(-3, 3, 1) = 1$$

Si ha quindi

$$\text{grad } f(1, 2, 3) = (6 \cdot (-3), 2 \cdot 3, -3 - 3) = (-18, 6, -6)$$



### Esercizio 3

Si ha

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ dove}$$

$S$  è la superficie contenuta e determinata dalla funzione

$$g: C \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

Per ogni  $(x, y) \in C$  si ha

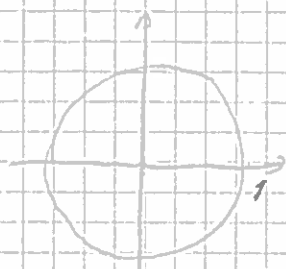
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Si ha quindi

$$\iint_S \sqrt{z} \, dS = \iint_C \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_C \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$



Una parametrizzazione in misure di  $C$  è la funzione  $\varphi$

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni  $(s, t) \in \text{dom } \varphi$  si ha  $|\det \varphi'(s, t)| = s$

Si ha quindi

$$\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + 4x + 4y^2} \, dx \, dy =$$

$G$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} s \sqrt{1 + 4s^2} \, ds \, dt =$$

$[0,1] \times [0,2\pi]$

$$\left( \int_0^1 s^2 \sqrt{1 + 4s^2} \, ds \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} dt \right) = 2\pi \int_0^1 s^2 \sqrt{1 + 4s^2} \, ds$$

Poniamo  $s = \frac{1}{2} \sinh t$  ; si ha  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \cosh t$

Per  $s=0$ , si ha  $t=0$  ; per  $s=1$  si ha  $t = \text{Arghsh } 2$

Si ha quindi:

$$2\pi \int_0^1 s^2 \sqrt{1 + 4s^2} \, ds =$$

$$= 2\pi \int_0^{\text{Arghsh } 2} \left( \frac{1}{2} \sinh t \right)^2 \sqrt{1 + 4 \left( \frac{1}{2} \sinh t \right)^2} \frac{1}{2} \cosh t \, dt =$$

$$= 2\pi \frac{1}{8} \int_0^{\text{Arghsh } 2} \sinh^2 t \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cosh t \, dt =$$

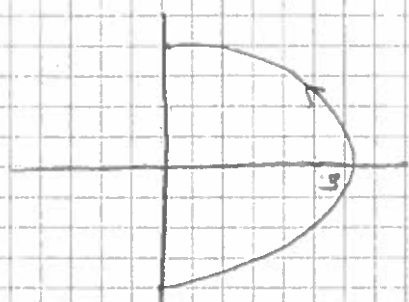
$$= \frac{\pi}{4} \int_0^{\text{Arghsh } 2} \sinh^2 t \cosh^2 t \, dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{1}{4} \int_0^{\text{Arghsh } 2} (2 \sinh t \cosh t)^2 \, dt =$$

$$= \frac{\pi}{16} \int_0^{\text{Arghsh } 2} \sinh^2 (2t) \, dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{16} \int_0^{\operatorname{Argh} 2} \frac{\operatorname{ch}(4t) - 1}{2} dt = \\
&= \frac{\pi}{32} \left[ \frac{1}{4} \operatorname{sh}(4t) - t \right]_0^{\operatorname{Argh} 2} = \\
&= \frac{\pi}{32} \left( \frac{1}{4} \operatorname{sh}(4 \operatorname{Argh} 2) - \operatorname{Argh} 2 \right) = \\
&= \frac{\pi}{32} \frac{1}{4} 2 \operatorname{sh}(2 \operatorname{Argh} 2) \operatorname{ch}(2 \operatorname{Argh} 2) - \frac{\pi}{32} \operatorname{Argh} 2 = \\
&= \frac{\pi}{32} \frac{1}{2} 2 \operatorname{sh} \operatorname{Argh} 2 \operatorname{ch} \operatorname{Argh} 2 (\operatorname{ch}^2 \operatorname{Argh} 2 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Argh} 2) \\
&\quad - \frac{\pi}{32} \operatorname{Argh} 2 = \\
&= \frac{\pi}{32} (2 \operatorname{ch} \operatorname{Argh} 2 (\operatorname{ch}^2 \operatorname{Argh} 2 + 4) - \operatorname{Argh} 2) \\
&= \frac{\pi}{16} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Argh} 2} (1 + \operatorname{sh}^2 \operatorname{Argh} 2 + 4) - \frac{\pi}{32} \operatorname{Argh} 2 = \\
&= \frac{\pi}{16} \sqrt{1 + 4} (1 + 4 + 4) - \frac{\pi}{32} \operatorname{Argh} 2 = \\
&= \frac{9}{16} \sqrt{5} \pi - \frac{\pi}{32} \operatorname{Argh} 2
\end{aligned}$$

### Exercice 6



Une paramétrisation de  $\Gamma$  est

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases} \quad t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

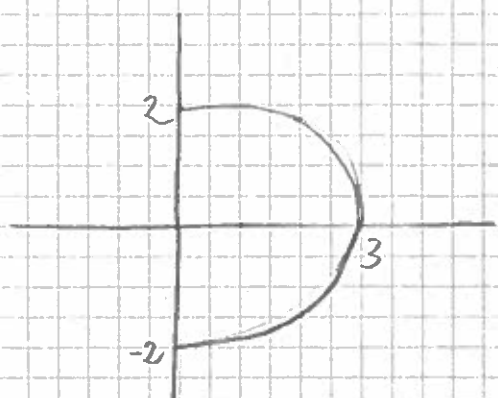
Si le qu'on a

$$\int_{\Gamma} y dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t (-3 \sin t) dt = -6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= -6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = -3 \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -3 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -3\pi$$

### Esercizio 5



a) Sia  $D = \text{dom}(f)$

Essendo  $D$  compatto e  $f$  continua, per il teorema di Weierstrass,  $f$  ammette massimo e minimo

b) Sia  $E$  l'insieme degli estremi assoluti di  $f$ .

Sia  $(x,y) \in D^0$ . Sia che  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 \neq 0$ . Sia quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Sia

$$F_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, x > 0 \right\}$$

$$F_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x=0, -2 < y < 2 \right\}$$

$$F_3 = \{(0, 2)\}$$

$$F_4 = \{(0, -2)\}$$

$$\text{Sia che } F_2(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

Sia

$$g: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1$$

$F_1$  è la sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione 1 data

e quononi cartesiane  $g(x, y) = 0$

Identifichiamo  $f$  con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow 2x + y$$

Se  $(x, y) \in F \cap F_2$ , per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y).$$

cioè tale che

$$(2, 1) = \lambda \left( \frac{2}{9}x, \frac{1}{2}y \right)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2 = \frac{2}{9} \lambda x \\ 1 = \frac{1}{2} \lambda y \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Per  $\lambda = 0$  il sistema non ha soluzioni. Supponiamo

$\lambda \neq 0$ . Si ha

$$x = \frac{9}{\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}$$

quindi

$$\frac{1}{9} \left( \frac{9}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{2}{\lambda} \right)^2 = 1 \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$\frac{9}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \quad ; \quad \text{quindi}$$

$$10 = \lambda^2; \quad \text{quindi} \quad \lambda = \pm \sqrt{10}$$

Per  $\lambda = \sqrt{10}$  si ha

$$x = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9}{10} \sqrt{10}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{10} \sqrt{10}$$

Per  $\lambda = -\sqrt{10}$  si ha  $x = -\frac{9}{\sqrt{10}} < 0$ ; quindi nessuna soluzione.

Si trova quindi  $(x, y) = \left( \frac{9}{10} \sqrt{10}, \frac{2}{10} \sqrt{10} \right)$

Si ha quindi

$$E \cap F_1 = \left\{ \left( \frac{9}{10} \sqrt{10}, \frac{2}{10} \sqrt{10} \right) \right\}$$

Sia ora

$$g: \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 < y < 2 \} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$$

$F_2$  è la sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$  di dimensione 1 di equazione cartesiana  $g(x, y) = 0$

Se  $(x, y) \in E \cap F_2$  per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, esiste  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che

$$\text{grad} f(x, y) = \lambda \text{ grad} g(x, y),$$

cioè tale che

$$(2, 1) = \lambda (1, 0)$$

Si ha  $1=0$ ; ciò è assurdo. Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{ \left( \frac{9}{10} \sqrt{10}, \frac{2}{10} \sqrt{10} \right), (0, 2), (0, -2) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{9}{10}\sqrt{10}, \frac{2}{10}\sqrt{10}\right) = \frac{18}{10}\sqrt{10} + \frac{2}{10}\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$f(0, 2) = 2$$

$$f(0, -2) = -2$$

Si ha quindi  $\max(f) = 2\sqrt{10}$ ,  $\min(f) = -2$

### Esercizio 6

Per ogni  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Le punti critici di  $f$  sono le soluzioni di

$$\begin{cases} \frac{2x}{x^2 + y^2} - 2x = 0 \\ \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{x^2} - x = 0 \end{cases}, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{x} - x = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} = 0 \end{cases}, \text{ cioè } \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

La funzione  $f$  ha quindi punti critici  $(1, 0)$  e  $(-1, 0)$

Per ogni  $(x, y) \in \text{dom}(f)$  si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \frac{x^2+y^2 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} - 2x = 2 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y \frac{1}{(x^2+y^2)^2} - 2x = -4 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \frac{x^2+y^2 - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = 2 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Si ha quindi:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - 2 & -4 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} \\ -4 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & 2 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$D^2 f(1,0) = D^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Quindi  $(1,0)$  e  $(-1,0)$  sono punti di sella

Quindi  $f$  non ammette estremanti relativi

### Esercizio 7 (1° modo)

Si tratta di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica dell'equazione

omogenee associate è

$$\lambda^6 - \lambda^5 = 0$$

ovvero

$$\lambda^5 (\lambda - 1) = 0$$

L'equazione ha soluzioni  $\lambda = 0$  di molteplicità 5 e  $\lambda = 1$  semplice.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenee associate è

$$\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = x^2, \varphi_4(x) = x^3, \varphi_5(x) = x^4, \varphi_6(x) = e^x$$

Essendo 0 radice di molteplicità 5 dell'equazione caratteristica, esiste  $A \in \mathbb{R}$  tale che

$$\psi(x) = A x^5$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Perciò

$$\psi'(x) = 5 A x^4$$

$$\psi''(x) = 20 A x^3$$

$$\psi'''(x) = 60 A x^2$$

$$\psi^{(4)}(x) = 120 A x$$

$$\psi^{(5)}(x) = 120 A$$

$$\psi^{(6)}(x) = 0$$

Quindi la funzione  $\psi$  è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$-120 A = 1$$

cioè se e solo se

$$A = -\frac{1}{120}$$

Si ha quindi:

$$\psi(x) = -\frac{1}{120} x^5$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4 + C_6 e^x - \frac{1}{120} x^5$$

Si ha

$$y'(x) = C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2 + 4C_5 x^3 + C_6 e^x - \frac{1}{24} x^4$$

$$y''(x) = 2C_3 + 6C_4 x + 12C_5 x^2 + C_6 e^x - \frac{1}{6} x^3$$

$$y'''(x) = 6C_4 + 24C_5 x + C_6 e^x - \frac{1}{2} x^2$$

$$y^{(4)}(x) = 24C_5 + C_6 e^x - x$$

$$y^{(5)}(x) = C_6 e^x - 1$$

La funzione  $y(x)$  è soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} C_1 + C_6 = 0 \\ C_2 + C_6 = 0 \\ 2C_3 + C_6 = 0 \\ 6C_4 + C_6 = 0 \\ 24C_5 + C_6 = 0 \\ C_6 - 1 = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo  $C_6 = 1$   $C_1 = -1$   $C_2 = -1$ ,  $C_3 = -\frac{1}{2}$

$$C_4 = -\frac{1}{6}, \quad C_5 = -\frac{1}{24}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = -1 - x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 + e^x - \frac{1}{120} x^5$$

## Esercizio 7 (2° modo)

Poniamo  $z = y^{(5)}$ , si ha  $y^{(6)} = z'$

Quindi

$$z' - z = 1$$

Quindi  $z$  è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z + 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{\int_0^x dt} \cdot \int_0^x e^{-\int_0^t dt} du = e^x \int_0^x e^{-u} du = \\ &= e^x \left[ -e^{-u} \right]_0^x = e^x (-e^{-x} + 1) = e^x - 1 \end{aligned}$$

Quindi

$$y^{(5)}(x) = e^x - 1$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} y^{(4)}(x) &= 0 + \int_0^x y^{(5)}(t) dt = \int_0^x (e^t - 1) dt = \\ &= \left[ e^t - t \right]_0^x = e^x - x - 1 \end{aligned}$$

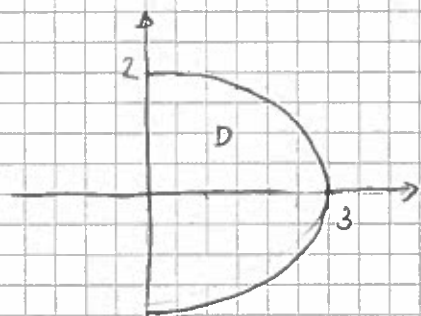
$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) &= 0 + \int_0^x y^{(4)}(t) dt = \int_0^x (e^t - t - 1) dt = \\ &= \left[ e^t - \frac{1}{2} t^2 - t \right]_0^x = e^x - \frac{1}{2} x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= 0 + \int_0^x y^{(3)}(t) dt = \int_0^x \left( e^t - \frac{1}{2} t^2 - t - 1 \right) dt = \\ &= \left[ e^t - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t \right]_0^x = e^x - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= 0 + \int_0^x y''(t) dt = \int_0^x \left( e^t - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t - 1 \right) dt = \\
 &= \left[ e^t - \frac{1}{24} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t \right]_0^x = \\
 &= e^x - \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - x - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(x) &= 0 + \int_0^x y'(t) dt = \int_0^x \left( e^t - \frac{1}{24} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t - 1 \right) dt = \\
 &= \left[ e^t - \frac{1}{120} t^5 - \frac{1}{24} t^4 - \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t \right]_0^x = \\
 &= e^x - \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - x - 1
 \end{aligned}$$

### Esercizio 8



Una parametrizzazione in  
misura di  $D$  è la funzione  $\varphi$

$$\begin{cases} x = 3 \rho \cos t \\ y = 2 \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Per ogni  $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$  si ha

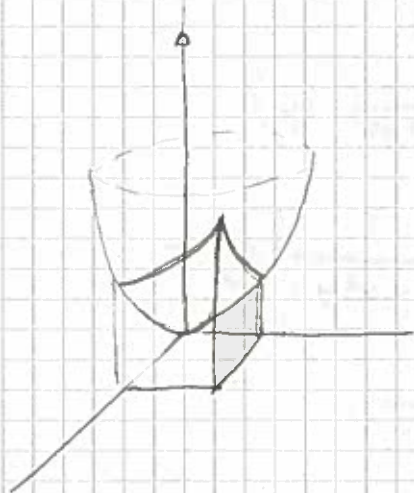
$$|\det \varphi'(\rho, t)| = 6\rho$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 \iint_D y^2 dx dy &= \iint_{[0,1] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} 4 \rho^2 \sin^2 t \cdot 6\rho d\rho dt = \\
 &= 24 \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \cdot \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \right) = \\
 &= 24 \left[ \frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt =
 \end{aligned}$$

$$= 24 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left[ t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 3 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 3\pi$$

Esercizio 9



Si ha  $P_{1,2}(D) = [0,1] \times [0,1]$

Per ogni  $(x,y) \in P_{1,2}(D)$  vale

$$D(x,y) = [0, x^2 + y^2]$$

Si ha quindi

$$\text{mis}(D) = \iiint_D dx dy dz =$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \left( \int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx dy =$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,1]} (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$= \int_0^1 \left( \int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} x \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$