Analisi Matematica 2 - 11 /7/'16 - Compito 3 - Versione 1

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (x^2 y, x^2 - y) \; ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1,1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.
   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1,1)$ tale che
   $$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;
   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1,1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1,1)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Risposta.

2. (p. 4) Sia
$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; \; y^2 + 8x - 16 > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \log(y^2 + 8x - 16)$$
   e V la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1
   $$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 ; \; 8x = 17 - y^2\} \; ;$$
   (a) si determini il versore tangente $\vec{\mathbf{t}}$ a V nel punto $(1,3)$, tale che $\vec{\mathbf{t}}_1 > 0$;
   (b) si calcoli la derivata direzionale di f in $(1,3)$ secondo la direzione $\vec{\mathbf{t}}$.

   Suggerimento. Un vettore ortogonale a (a, b) è $(-b, a)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali

$$\int\int_S z\, dx \wedge dz\ ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ z = x^2 + y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \leq 1\}\,,$$

orientata in modo tale che $(\vec{n}(x, y, z))_3 < 0$ per ogni (x, y, z) di S.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione:

$$\int_\gamma y^2\, ds\ ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 9,\ y \geq 0\}\ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ -y \leq x \leq y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + \frac{3}{2}y\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^3 y + x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = e^{2x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D x\,dxdy\ ,$$

dove D è il triangolo di vertici $(1,2)$, $(3,5)$, $(-1,-2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (x+3y+3z)\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 \leq z \leq 1\}\ .$$

Svolgimento e risposta.

Analisi Matematica 2 - 11 /7/'16 - Compito 3 - Versione 2

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia
$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (y^2 - x, xy^2) \; ;$$
   (a) determinare la trasformazione lineare $f'(1,1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V, W e $\mathcal{T}\{h\}$.

   (b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1,1)$ tale che
$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$
   è un diffeomorfismo;

   (c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1,1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'\big(f(1,1)\big)$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

   Risposta.

2. (p. 4) Sia
$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\; x^2 + 8y - 16 > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \log(x^2 + 8y - 16)$$
   e V la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\; 8y = 17 - x^2\} \; ;$$
   (a) si determini il versore tangente $\vec{\mathbf{t}}$ a V nel punto $(3,1)$, tale che $\vec{\mathbf{t}}_1 > 0$;

   (b) si calcoli la derivata direzionale di f in $(3,1)$ secondo la direzione $\vec{\mathbf{t}}$.

   Suggerimento. Un vettore ortogonale a (a, b) è $(-b, a)$.

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali

$$\int\int_S (1-z)\, dy \wedge dz \ ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ z = 1 - x^2 - y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}\,,$$

orientata in modo tale che $(\vec{n}(x,y,z))_3 > 0$ per ogni (x,y,z) di S.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione:

$$\int_\gamma x^2\, ds \ ,$$

dove

$$\gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0\}\ .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1,\ -x \leq y \leq x\big\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y) \longrightarrow \frac{3}{2}x + y^2 \ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^2 y - x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = e^{-2x} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\int\int_D y\,dxdy\ ,$$

dove D è il triangolo di vertici $(2,1)$, $(5,3)$, $(-2,-1)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\int\int\int_D (3x+3y-z)\,dxdydz\ ,$$

dove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}\ .$$

Svolgimento e risposta.