

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x, y) \longrightarrow (x^2 y, x^2 - y) ;$$

(a) determinare la trasformazione lineare $f'(1, 1)$ esprimendola nella forma $T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\}$, esplicitando V , W e $\mathcal{T}\{h\}$.

(b) dire se esiste un intorno aperto U di $(1, 1)$ tale che

$$U \longrightarrow f(U), u \longrightarrow f(u)$$

è un diffeomorfismo;

(c) in caso affermativo, indicato ancora con f tale diffeomorfismo, si determini $f(1, 1)$ e la trasformazione lineare $(f^{-1})'(f(1, 1))$ esprimendo la trasformazione lineare nella forma sopra descritta.

Risposta.

2. (p. 4) Sia

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y^2 + 8x - 16 > 0\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow \log(y^2 + 8x - 16)$$

e V la sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 8x = 17 - y^2\} ;$$

(a) si determini il versore tangente $\vec{t}$ a V nel punto $(1, 3)$, tale che $\vec{t}_1 > 0$;

(b) si calcoli la derivata direzionale di f in $(1, 3)$ secondo la direzione $\vec{t}$.

Suggerimento. Un vettore ortogonale a (a, b) è $(-b, a)$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali

$$\int \int_S z \, dx \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 1\},$$

orientata in modo tale che $(\vec{n}(x, y, z))_3 < 0$ per ogni (x, y, z) di S .

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione:

$$\int_{\gamma} y^2 \, ds ,$$

dove

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 9, y \geq 0\} .$$

Si chiede di non utilizzare formule che diano direttamente le primitive di $\cos^n t$ o di $\sin^n t$, per $n \neq 1$.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow x^2 + \frac{3}{2}y ,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x^3 y + x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = e^{2x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Svolgimento e risposta.

4

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x \, dx dy ,$$

dove D è il triangolo di vertici $(1, 2)$, $(3, 5)$, $(-1, -2)$.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D (x + 3y + 3z) \, dx dy dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Vernone 1

Esercizio 1

a) Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2xy, 2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2, -1)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$f'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$f(1, 1): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2) \rightarrow (2h_1 + h_2, 2h_1 - h_2)$$

b) Si ha

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$

Zunächst existiert ein um $(1, 1)$ herum offenes U so, dass

$$U \rightarrow f(U), (x, y) \mapsto f(x, y)$$

ein Diffeomorphismus ist.

c) Si ha $f(1, 1) = (1, 0)$

Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

2

$$(f^{-1})'(1,0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (k_1, k_2) \rightarrow \left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{6}k_2, \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2\right)$$

Esercizio 2

a) S.c.

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow y^2 + 8x - 16$$

V è la sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y) = 0$

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\text{grad } g(x, y) = (8, 2y)$$

Quindi

$$\text{grad } g(1, 3) = (8, 6)$$

Una base di $N_{(1,3)}(V)$ è $(8, 6)$;

una base di $T_{(1,3)}(V)$ è quindi $(-6, 8)$

Un'altra base di $T_{(1,3)}$ è quindi $(3, -4)$

S.c. ha

$$\|(3, -4)\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Le vettori tangenti a V in $(1, 3)$ sono quindi

$$\pm \frac{(3, -4)}{\|(3, -4)\|} = \pm \frac{(3, -4)}{5} = \pm \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Prendendo $\bar{E}_1 > 0$, si ha

$$\bar{E} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

b) Si ha $f(x, y) \in \text{dom}(f)$. S.c. ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y^2 + 8x - 16} \cdot 8 = \frac{8}{y^2 + 8x - 16}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2+8x-16} \cdot 2y = \frac{2y}{y^2+8x-16}$$

Si ha quindi:

$$\text{grad } f(x,y) = \left(\frac{8}{y^2+8x-16}, \frac{2y}{y^2+8x-16} \right)$$

Si ha quindi:

$$\text{grad } f(1,3) = (8, 6)$$

Si ha quindi:

$$df(1,3): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (h_1, h_2) \rightarrow 8h_1 + 6h_2$$

Si ha

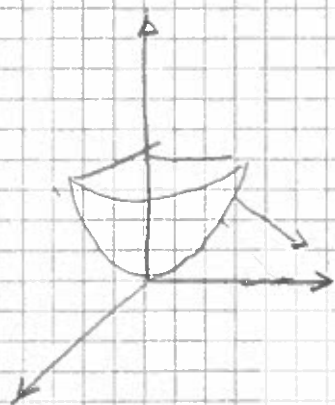
$$D_{\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)} f(1,3) = df(1,3) \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) =$$

$$= 8 \frac{3}{5} + 6 \left(-\frac{4}{5} \right) = \frac{24}{5} - \frac{24}{5} = 0$$

Esercizio 3

$$\text{Sia } D = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2; u > 0, v > 0, u^2 + v^2 \leq 1 \}$$

Una parametrizzazione di S non orientata è la funzione φ



$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases} \quad (u,v) \in D$$

Per ogni $(u,v) \in D$ si ha

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

Si ha $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$; quindi φ è una parametrizzazione di S si ha quindi

$$\iint_S z \, dx \wedge dz = - \iint_{-S} z \, dx \wedge dz =$$

$$= - \iint_D (u^2 + v^2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} du \, dv =$$

$$= - \iint_D (u^2 + v^2) 2v \, du \, dv = -2 \iint_D (u^2 + v^2) v \, du \, dv$$



una parametrizzazione in misure di D è la funzione φ

$$\begin{cases} u = \rho \cos t \\ v = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom } \varphi$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$

Si ha quindi

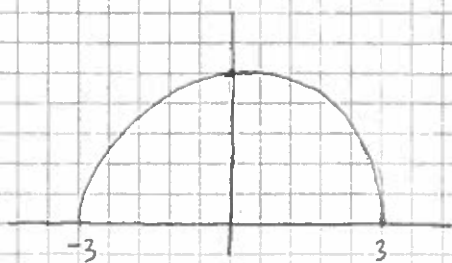
$$-2 \iint_D (u^2 + v^2) v \, du \, dv =$$

$$= -2 \iint_{[0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]} \rho^2 \rho \sin t \, \rho \, d\rho \, dt =$$

$$= -2 \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt \right) =$$

$$= -2 \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 4



una parametrizzazione di X è la funzione φ

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

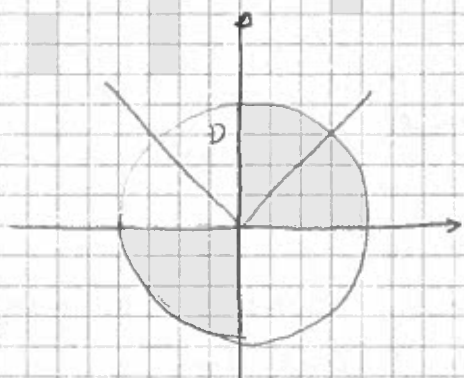
Per ogni $t \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $\varphi'(t) = (-3 \sin t, 3 \cos t)$;
quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{9 \sin^2 t + 9 \cos^2 t} = \sqrt{9} = 3$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} y^2 ds &= \int_0^{\pi} 9 \sin^2 t \cdot 3 dt = 27 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= 27 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \frac{27}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2t)) dt = \\ &= \frac{27}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\pi} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 5



a) Sia $D = \text{dom}(f)$.

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti su D .

b) Sia E l'insieme degli estremanti assoluti di f .

Sia $(x, y) \in D$; si ha $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{2} \neq 0$. Si ha quindi

$$E \cap D = \emptyset$$

L'intersezione delle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ con le rette $x = y$ è $\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$

L'intersezione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con la retta $y = -x$ è $\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$

Si ha

$$F_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, y > 0 \right\}$$

$$F_2 = \left] (0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right[$$

$$F_3 = \left] (0, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right[$$

$$F_4 = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$F_5 = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

$$F_6 = \{ (0, 0) \} \quad \text{Si ha } F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5 \cup F_6$$

Si ha

$$g: \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}, y > 0 \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

F_1 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione costante $g(x, y) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + \frac{3}{2}y$$

Se $(x, y) \in F_1 \cap F$. Per il teorema sui multiple zeri di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y);$$

quindi tale che

$$\left(2x, \frac{3}{2} \right) = \lambda \left(2x, 2y \right)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ \frac{3}{2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y > 0 \end{cases}$$

Se $x = 1$; quindi $x(1-1) = 0$; quindi $x = 0$ o $\lambda = 1$

Per $x = 0$ si ha $y^2 = 1$; quindi $y = \pm 1$; essendo

$y > 0$, si ha $y = 1$; si trova il punto $(0, 1)$

Per $\lambda = 1$ si ha $\frac{3}{2} = 2y$; quindi $y = \frac{3}{4}$;

quindi $x^2 + \frac{9}{16} = 1$; quindi $x^2 = \frac{7}{16}$; quindi

$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$; si ha $\frac{\sqrt{7}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ si e solo se

$\sqrt{7} < 2\sqrt{2}$; quindi se e solo se $7 < 8$; ciò è

vero; si ha quindi $-\frac{\sqrt{2}}{2} < -\frac{\sqrt{7}}{4} < \frac{\sqrt{7}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

si trovano i punti $(-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4})$

Si ha quindi

$$E \cap F_1 \subset \left\{ (0, 1), \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{4}\right) \right\}$$

Si ha ora

$$g: \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x - y$$

F_2 è la sottovarietà differenziale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x, y) = 0$

Se $(x, y) \in F_2 \cap E$, Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

cioè tale che

$$\left(2x, \frac{3}{2}\right) = \lambda(1, -1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ \frac{3}{2} = -\lambda \\ x = y \\ 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Si ha $\lambda = -\frac{3}{2}$; quindi $2x = -\frac{3}{2}$; quindi $x = -\frac{3}{4} < 0$;

quindi nessuna soluzione.

Si ha quindi

$$E \cap F_2 = \emptyset$$

Si ha

$$g: x \in \mathbb{R}^2; -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x+y$$

è funzione differenziabile di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 di eq. zero contenente $g(x, y) = 0$

ie $x, y \in E \cap F_3$. Per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

cioè tale che

$$\left(2x, \frac{3}{2}\right) = \lambda(1, 1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ \frac{3}{2} = \lambda \\ x + y = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0 \end{cases}$$

Se he $x = \frac{3}{4} > 0$; quindi nessuna soluzione.

Se he quindi

$$E \cap E_3 = \emptyset$$

Se he quindi

$$E \subset \left\{ (0, 1), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0, 0) \right\}$$

Se he

$$f(0, 1) = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{16} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{25}{16}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{25}{16}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{2}$$

$$f(0, 0) = 0$$

Se he $\frac{3}{2} < \frac{25}{16}$ se e solo se $48 < 50$; ciò è vero.

Se he quindi

$$\frac{3}{2} < \frac{25}{16}$$

$$\text{Se he } \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{2} < \frac{25}{16} \text{ se e solo se } 8 + 12\sqrt{2} < 25$$

ciò se e solo se $12\sqrt{2} < 17$, e se e solo se

$$2^2 \cdot 2 < 17^2; \text{ ciò se e solo se } 288 < 289; \text{ ciò è}$$

vero; n he quindi

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{2} < \frac{25}{16}$$

e che quindi

$$\max(f) = \frac{25}{16}$$

$$\min(f) = 0$$

Esercizio 6

È un'equazione differenziale lineare del primo ordine

Una primitiva di x^3 è la funzione

$$\alpha = \frac{1}{4} x^4$$

Si ha

$$\int e^{-\frac{1}{2}x^4} x^4 dx = - \int e^{-\frac{1}{2}x^4} (-x^3) dx = e^{-\frac{1}{2}x^4} + C$$

Quindi un'equazione di $e^{-\frac{1}{2}x^4} x^3 = e^{-\frac{1}{2}x^4}$

atte alla forma dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{2} (-e^{-\frac{1}{2}x^4}) y = e^{-\frac{1}{2}x^4} - 1$$

al variare di C in $\mathbb{R}$

Essendo $y(1) = 0$, si ha $-1 = 0$; quindi $C = 1$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = e^{\frac{1}{4}x} - 1$$

Esercizio 7

La teoria di un vettore e di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare non omogenea con coefficienti costanti.

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

cioè

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

L'equazione ha soluzione $\lambda = -3$ doppia.

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{-3x}, \quad \varphi_2(x) = x e^{-3x}$$

Per $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\psi(x) = A e^{2x}$$

è soluzione dell'equazione non omogenea.

Si ha

$$\psi'(x) = 2A e^{2x}$$

$$\psi''(x) = 4A e^{2x}$$

Quindi ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$4A e^{2x} + 6 \cdot 2A e^{2x} + 9A e^{2x} = e^{2x}$$

cioè se e solo se

$$25A = 1,$$

cioè se e solo se

$$A = \frac{1}{25}$$

Si ha quindi $\psi(x) = \frac{1}{25} e^{2x}$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi:

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + \frac{1}{25} e^{2x}$$

Si ha

$$y'(x) = -3c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-3x} - 3c_2 x e^{-3x} + \frac{2}{25} e^{2x}$$

La funzione $y(x)$ è quindi soluzione del problema di Cauchy se e solo se

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{25} = 0 \\ -3c_1 + c_2 + \frac{2}{25} = 0 \end{cases}$$

quindi se e solo se $c_1 = -\frac{1}{25}$ e $c_2 = -\frac{1}{5}$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi(x) = -\frac{1}{25} e^{-3x} - \frac{1}{5} x e^{-3x} + \frac{1}{25} e^{2x}$$

Esercizio 8

Si ha

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$$

5 punti di D sono dati da

$$(x, y) = u(1, 2) + v(3, 5) + (1-u-v)(-1, -2)$$

al variare di (u, v) in T

Si ha

$$x = u + 3v - 1 + u + v = 2u + 4v - 1$$

$$y = 2u + 5v - 2 + 2u + 2v = 4u + 7v - 2$$

Una parametrizzazione di D è quindi la funzione φ

$$\begin{cases} x = 2u + 4v - 1 \\ y = 4u - 2v - 2 \end{cases} \quad (u, v) \in T$$

Per ogni $(u, v) \in T$ si ha

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

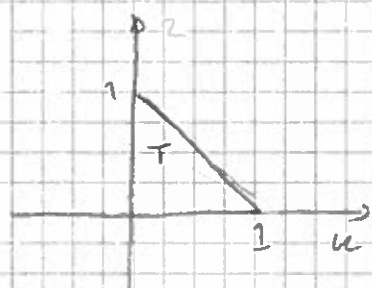
Si ha quindi

$$|\det \varphi'(u, v)| = |16 - 16| = |-2| = 2$$

Si ha quindi

$$\int_D x \, dx \, dy = \int_T (2u + 4v - 1) \cdot 2 \, du \, dv =$$

$$= 2 \iint_T (2u + 4v - 1) \, du \, dv$$



Si ha $p_1(T) = [0, 1]$ e per ogni

$u \in [0, 1]$ si ha

$$T(u) = [0, 1 - u]$$

Si ha quindi

$$2 \iint_T (2u + 4v - 1) \, du \, dv = 2 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (2u + 4v - 1) \, dv \right) du =$$

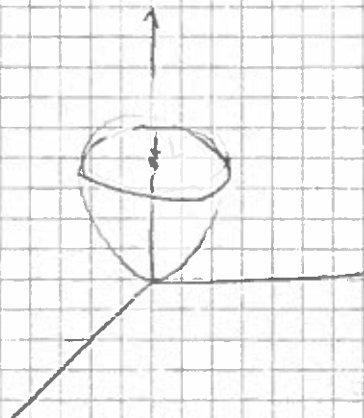
$$= 2 \int_0^1 \left[2uv + 2v^2 - v \right]_0^{1-u} du =$$

$$= 2 \int_0^1 (2u(1-u) + 2(1-u)^2 - (1-u)) du =$$

$$= 2 \int_0^1 (2u - 2u^2 + 2 - 4u + 2u^2 - 1 + u) du =$$

$$= 2 \int_0^1 (-u + 1) du = 2 \left[-\frac{1}{2} u^2 + u \right]_0^1 = 2 \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 1$$

Esercizio 9



Si ha

$$\iiint_D (x + 3y + 3z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_D x dx dy dz + 3 \iiint_D y dx dy dz + 3 \iiint_D z dx dy dz$$

Per la simmetria rispetto al piano yz si ha

$$\iiint_D x dx dy dz = 0$$

Per la simmetria rispetto al piano xz si ha

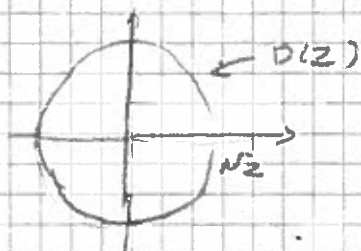
$$\iiint_D y dx dy dz = 0$$

Si ha quindi

$$\iiint_D (x + 3y + 3z) dx dy dz = 3 \iiint_D z dx dy dz$$

Si ha $p_z(D) = [0, 1]$ e per ogni $z \in [0, 1]$ si ha

$$D(z) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z \}$$



Si ha quindi

$$3 \iiint_D z dx dy dz = 3 \int_0^1 \left(\iint_{D(z)} z dx dy \right) dz =$$

$$= 3 \int_0^1 z \left(\iint_{D(z)} dx dy \right) dz = 3 \int_0^1 z \cdot \text{area}(D(z)) dz = 3 \int_0^1 z \pi z dz =$$

$$= 3\pi \int_0^1 z^2 dz = 3 \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = \pi$$