

Analisi Matematica 2 - 5/9/16

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale : ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x, y, z) = ((\log x)(\log y)(\log z), xyz) ;$$

- (a) determinare il dominio naturale di f ;
- (b) determinare la matrice jacobiana di f in un punto generico del dominio;
- (c) determinare la trasformazione lineare derivata di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} .$$

Svolgimento e risposta.

2. (p. 4) Calcolare il seguente integrale di superficie di forme differenziali:

$$\int \int_S z \, dy \wedge dz ,$$

dove S è la superficie

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = x + y + 1\} ,$$

orientata in modo che per ogni $(x, y, z) \in S$ sia $(\vec{n}(x, y, z))_3 > 0$.

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; xyz - x^2 + 3y^3 - z^4 + 5 = 0\};$$

- (a) (non assegnata) dimostrare che V è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 differenziale;
- (b) (non assegnata) provare che $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1) \in V$;
- (c) (p. 3) sapendo che V è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ differenziale di dimensione 2 di equazione cartesiana

$$xyz - x^2 + 3y^3 - z^4 + 5 = 0,$$

determinare lo spazio normale, la retta normale, lo spazio tangente, il piano tangente a V in $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1)$, esprimendoli attraverso le equazioni parametriche o attraverso le equazioni cartesiane (in forma vettoriale o scalare).

Svolgimento e risposta.

4. (p. 4) Calcolare il seguente integrale curvilineo:

$$\int_{\gamma} z^3 ds,$$

dove

$$\gamma = \{(t \cos t, t \sin t, t); t \in [0, 2\pi]\}.$$

Suggerimento. Per calcolare l'integrale a cui si riduce l'integrale curvilineo assegnato, si proceda per sostituzione; una possibile sostituzione è porre la radice che compare uguale ad u .

Svolgimento e risposta.

5. (p. 4) Data la funzione

$$f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow 5x + 3y,$$

- (a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;
- (b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f .

Svolgimento e risposta.

6. (p. 3) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{\sqrt{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 8xe^x \\ y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 0 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 4) Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D x \, dx \, dy ,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 1, x \geq 0\} ;$$

Svolgimento e risposta.

9. (p. 4) Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz ,$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq 2z \leq x^2 + y^2 \leq 1\} .$$

Svolgimento e risposta.

Esercizio 1

a) Si ha $\text{dom}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > 0, y > 0, z > 0\}$

b) Per ogni $(x, y, z) \in \text{dom}(f)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left(\frac{(\log y)(\log z)}{x}, yz \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left(\frac{(\log x)(\log z)}{y}, xz \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \left(\frac{(\log x)(\log y)}{z}, xy \right)$$

Si ha quindi

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{(\log y)(\log z)}{x} & \frac{(\log x)(\log z)}{y} & \frac{(\log x)(\log y)}{z} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

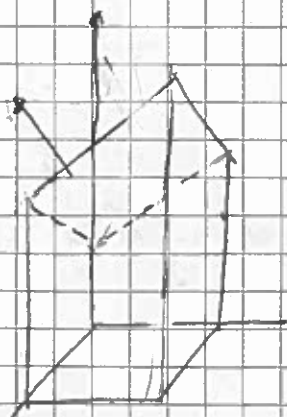
c) Si ha

$$f'(x, y, z): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (h_1, h_2, h_3) \longrightarrow$$

$$\left(\frac{(\log y)(\log z)}{x} h_1 + \frac{(\log x)(\log z)}{y} h_2 + \frac{(\log x)(\log y)}{z} h_3, yzh_1 + xzh_2 + xyh_3 \right)$$

Esercizio 2

Una parametrizzazione di S non orientata è data dalla funzione φ



$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + u + v \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

Per ogni $(u, v) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = (1, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = (0, 1, 1)$$

Si ha quindi:

$$\varphi'(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 ; \text{ quindi } \varphi \text{ è concorde con}$$

l'orientazione di S .

Si ha quindi:

$$\iint_S z \, dy \wedge dz =$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,1]} (1+u+v) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} du \, dv = \iint_{[0,1] \times [0,1]} (1+u+v) (-1) du \, dv =$$

$$= - \int_0^1 \left(\int_0^1 (1+u+v) dv \right) du = - \int_0^1 \left[v + uv + \frac{1}{2} v^2 \right]_0^1 du =$$

$$= - \int_0^1 \left(1 + u + \frac{1}{2}\right) du = - \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + u\right) du =$$

$$= - \left[\frac{3}{2} u + \frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) = -2$$

Esercizio 3

a) Si è

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xyz - x^2 + 3y^3 - z^4 + 5$$

f è di classe C^1 e vale

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0 \right\}$$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vale

$$f'(x, y, z) = (yz - 2x \quad xz + 9y^2 \quad xy - 4z^3)$$

Si ha sempre $f'(x, y, z) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} yz - 2x = 0 \\ xz + 9y^2 = 0 \\ xy - 4z^3 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} yz = 2x \\ xz = -9y^2 \\ xy = 4z^3 \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} xyz = 2x^2 \\ xyz = -9y^3 \\ xyz = 4z^4 \end{cases}$$

Quindi

4

$$\begin{cases} x^2 = \frac{xyz}{2} \\ y^3 = -\frac{xyz}{9} \\ z^4 = \frac{xyz}{4} \end{cases}$$

Se $(x, y, z) \in V$ n h e

$$xyz - x^2 + 3y^3 - z^4 + 5 = 0$$

Resumindo:

$$xyz - \frac{xyz}{2} + 3\left(-\frac{xyz}{9}\right) - \frac{xyz}{4} + 5 = 0$$

Resumindo:

$$xyz - \frac{1}{2}xyz - \frac{1}{3}xyz - \frac{1}{4}xyz + 5 = 0$$

Resumindo:

$$-\frac{1}{12}xyz + 5 = 0$$

Resumindo $xyz = 60$

Se h e qumado:

$$\begin{cases} x^2 = 30 \\ y^3 = -\frac{20}{3} \\ z^4 = 15 \end{cases}$$

Se h e qumado:

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{30} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{20}{3}} \\ z = \pm \sqrt[4]{15} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} 60 = xyz &= |xyz| = \sqrt{30} \sqrt[3]{\frac{20}{3}} \sqrt[4]{15} = \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} = \\ &= 2^{\frac{7}{6}} \cdot 3^{\frac{5}{12}} \cdot 5^{\frac{13}{12}} \end{aligned}$$

Quindi

$$2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 2^{\frac{7}{6}} \cdot 3^{\frac{5}{12}} \cdot 5^{\frac{13}{12}}$$

Quindi

$$2^{-\frac{5}{6}} \cdot 3^{-\frac{2}{12}} \cdot 5^{\frac{1}{12}} = 1$$

Quindi

$$5^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{12}}$$

Quindi

$$5 = 2^{10} \cdot 3^2$$

0.15 è assurdo

Si ha quindi $\forall (x, y, z) \in V$ rango $f'(x, y, z) = 1$

Quindi V è la rettovarietà di $\mathbb{R}^3$ di

dimensi one 2 di equazioni cartesiane

$$f(x, y, z) = 0$$

b) P.h.e

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1\right) &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}(-1) \cdot 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 3(-1)^2 - 1 + 5 = \\ &= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4} - 3 - 1 + 5 = \\ &= -\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{-\sqrt{5}+1-3+\sqrt{5}}{2} + 1 = -1+1=0 \end{aligned}$$

$$\text{quindi } \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1\right) \in V$$

c) Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ n.h.e

$$\text{grad } f(x, y, z) = (yz - 2x, xz + 3y^2, xy - 4z^3)$$

P.h.e quindi

$$\begin{aligned} \text{grad } f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1\right) &= \\ \left(-1 - (\sqrt{5}-1), \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 3, -\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 4\right) &= \\ = \left(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}+17}{2}, -\frac{\sqrt{5}+7}{2}\right) \end{aligned}$$

Una base per lo spazio normale a V

$$\text{in } \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1\right) \text{ è quindi}$$

$$\left(-\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}+17}{2}, -\frac{\sqrt{5}+7}{2}\right)$$

Un'altra base è quindi $-1 + 5 =$

$$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5} + 17, -\sqrt{5} - 7)$$

Delle equazioni parametriche per lo spazio normale sono quindi

$$(x, y, z) = t(-2\sqrt{5}, \sqrt{5} + 17, -\sqrt{5} - 7), \quad t \in \mathbb{R}$$

cioè

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{5}t \\ y = (\sqrt{5} + 17)t \\ z = (-\sqrt{5} - 7)t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni parametriche per la retta normale sono quindi

$$(x, y, z) = t(-2\sqrt{5}, \sqrt{5} + 17, -\sqrt{5} - 7) + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1\right)$$

cioè

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{5}t + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y = (\sqrt{5} + 17)t - 1 \\ z = (-\sqrt{5} - 7)t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Delle equazioni cartesiane per lo spazio tangente sono quindi

$$((x, y, z) \mid (-2\sqrt{5}, \sqrt{5} + 17, -\sqrt{5} - 7)) = 0$$

coe

$$-2\sqrt{5}x + (\sqrt{5}+17)y + (-\sqrt{5}-2)z = 0$$

Delle equazioni contenute per il piano tangente sono quindi:

$$\left((x, y, z) - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -1, 1 \right) \right) \cdot (-2\sqrt{5}, \sqrt{5}+17, -\sqrt{5}-2) = 0$$

coe

$$-2\sqrt{5} \left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) + (\sqrt{5}+17)(y+1) + (-\sqrt{5}-2)(z-1) = 0$$

coe

$$-2\sqrt{5}x + 5 - \sqrt{5} + (\sqrt{5}+17)y + \sqrt{5}+17 - (\sqrt{5}+2)z + \sqrt{5}+2 = 0$$

coe

$$-2\sqrt{5}x + (\sqrt{5}+17)y - (\sqrt{5}+2)z + 29 + \sqrt{5} = 0$$

Esercizio 32 (2° modulo)

Sia

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xyz - x^2 + 3y^2 - z^4 + 5$$

f è di classe C^∞ e n.h.e.

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = 0 \}$$

Per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ n.h.e.

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz - 2x & xz + 6y^2 & xy - 4z^3 \end{pmatrix}$$

Si ha $\text{rang } f'(x, y, z) = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} yz - 2x = 0 \\ xz + 9y^2 = 0 \\ xy - 4z^3 = 0 \end{cases}, \text{coe} \quad \begin{cases} yz = 2x \\ xz = -9y^2 \\ xy = 4z^3 \end{cases}, \text{coe}$$

$$\begin{cases} x = \frac{yz}{2} \\ \frac{yz}{2} \cdot z = -9y^2 \\ \frac{yz}{2} \cdot y = 4z^3 \end{cases}$$

Se $y = 0$, ou seja $x = 0$ e $z = 0$; nhe la
solucao $(0, 0, 0)$

Supponhamos $y \neq 0$

Se $z = 0$, ou seja $x = 0$ e $y = 0$; nhe la solucao
 $(0, 0, 0)$

Supponhamos $z \neq 0$

Os sistemas sobre $\mathbb{R}$ allora equivalente a

$$\begin{cases} x = \frac{yz}{2} \\ \frac{z^2}{2} = -9y \\ \frac{y^2}{2} = 4z^2 \end{cases}, \text{coe} \quad \begin{cases} x = \frac{yz}{2} \\ y = -\frac{z^2}{18} \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{z^2}{18} \right)^2 = 4z^2 \end{cases}$$

Se ha

$$\frac{1}{2} \frac{z^4}{18^2} = 4z^2, \text{coe, essendo } z \neq 0,$$

$$\frac{z^2}{2 \cdot 18^2} = 4, \text{ cioè}$$

$$z^2 = 2 \cdot 4 \cdot 18^2, \text{ cioè}$$

$$z = \pm 2 \cdot 18 \sqrt{2} = \pm 36 \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Per } z = 36 \sqrt{2} \text{ si ha } y &= -\frac{1}{18} 36^2 \cdot 2 = \\ &= -\frac{1}{18} \cdot 4 \cdot 18^2 \cdot 2 = -8 \cdot 18 = -144 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2} (-144) \cdot 36 \sqrt{2} = -2592 \sqrt{2}$$

Si trova le soluzioni del sistema

$$(-2592 \sqrt{2}, -144, 36 \sqrt{2})$$

$$\text{Per } z = -36 \sqrt{2} \text{ si ha } y = -144 \text{ e } x = 2592 \sqrt{2}$$

Si trova le soluzioni

$$(2592 \sqrt{2}, -144, -36 \sqrt{2})$$

L'insieme delle soluzioni del sistema è quindi

$$\{(0, 0, 0), (-2592 \sqrt{2}, -144, 36 \sqrt{2}), (2592 \sqrt{2}, -144, -36 \sqrt{2})\}$$

Si ha

$$f(0, 0, 0) = 5 \neq 0$$

$$f(-2592 \sqrt{2}, -144, 36 \sqrt{2}) = -2'239'483 \neq 0$$

$$f(2592 \sqrt{2}, -144, -36 \sqrt{2}) = -2'239'483 \neq 0$$

quindi $(0,0,0) \notin V$, $(-2592\sqrt{2}, -144, 36\sqrt{2}) \notin V$

$(2592\sqrt{2}, -144, -36\sqrt{2}) \notin V$

Per ogni $(x,y,z) \in V$ si ha quindi sempre $f'(x,y,z) = 1$

quindi V è la sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2
definita dall'equazione cartesiana $f(x,y,z) = 0$

Esercizio 4

Una parametrizzazione di γ è la funzione φ

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Per ogni $t \in [0, 2\pi]$ si ha

$$\varphi'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1);$$

quindi

$$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2 t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} =$$

$$= \sqrt{1 + t^2 + 1} = \sqrt{t^2 + 2}$$

Si ha quindi

$$\int z^3 ds = \int_0^{2\pi} t^3 \sqrt{t^2 + 2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t \cdot t^2 \sqrt{t^2+2} \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t^2 \sqrt{t^2+2} (2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi^2} u \sqrt{u+2} du$$

Poniamo $u+2 = v$; si ha $u = v-2$; quindi
 $\frac{du}{dv} = 1$; per $u=0$ si ha $v=2$; per $u=4\pi^2$ si ha
 $v=4\pi^2+2$; si ha quindi

$$\frac{1}{2} \int_0^{4\pi^2} u \sqrt{u+2} du = \frac{1}{2} \int_2^{4\pi^2+2} (v-2) \sqrt{v} dv =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^{4\pi^2+2} (v^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot v^{\frac{1}{2}}) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{v^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^{4\pi^2+2} =$$

$$= \left[\frac{1}{5} v^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \right]_2^{4\pi^2+2} =$$

$$= \frac{1}{5} (4\pi^2+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (4\pi^2+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \cdot 2^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1}{5} (4\pi^2+2)^2 \sqrt{4\pi^2+2} - \frac{2}{3} (4\pi^2+2) \sqrt{4\pi^2+2} - \frac{4}{5} \sqrt{2} + \frac{4}{3} \sqrt{2}$$

$$= \left(\frac{16\pi^4 + 16\pi^2 + 4}{5} - \frac{8\pi^2 + 4}{3} \right) \sqrt{4\pi^2+2} + \frac{8}{15} \sqrt{2} =$$

$$= \frac{48\pi^4 + 8\pi^2 - 8}{15} \sqrt{4\pi^2+2} + \frac{8}{15} \sqrt{2} =$$

$$8 \left((4\pi^4 + \pi^2 - 1) \sqrt{4\pi^2+2} + \sqrt{2} \right)$$

[Per calcolare $\int_0^{2\pi} t^3 \sqrt{t^2+2} dt$ si può porre

$$\sqrt{t^2+2} = u; \text{ che allora } t^2+2 = u^2;$$

quindi $t^2 = u^2 - 2$; quindi, essendo $t > 0$,

$$t = \sqrt{u^2-2}; \text{ che } \frac{dt}{du} = \frac{2u}{2\sqrt{u^2-2}} = \frac{u}{\sqrt{u^2-2}}$$

Per $t=0$, che $u=\sqrt{2}$; per $t=2\pi$ che

$$u = \sqrt{4\pi^2+2}$$

che quindi

$$\int_0^{2\pi} t^3 \sqrt{t^2+2} dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4\pi^2+2}} (\sqrt{u^2-2})^3 u \frac{u}{\sqrt{u^2-2}} du =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4\pi^2+2}} (\sqrt{u^2-2})^2 u^2 du =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4\pi^2+2}} (u^2-2) u^2 du = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4\pi^2+2}} (u^4 - 2u^2) du =$$

$$= \left[\frac{1}{5} u^5 - \frac{2}{3} u^3 \right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{4\pi^2+2}} =$$

$$= \frac{1}{5} (\sqrt{4\pi^2+2})^5 - \frac{2}{3} (\sqrt{4\pi^2+2})^3 - \frac{1}{5} (\sqrt{2})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{2})^3 =$$

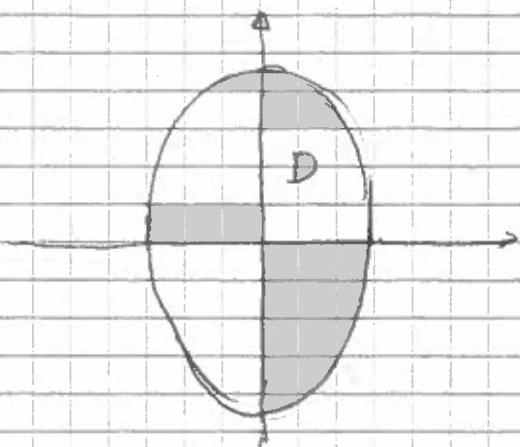
$$= \frac{1}{5} (4\pi^2+2)^2 \sqrt{4\pi^2+2} - \frac{2}{3} (4\pi^2+2) \sqrt{4\pi^2+2} - \frac{4}{5} \sqrt{2} + \frac{4}{3} \sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{5} (16\pi^4 + 16\pi^2 + 4) \sqrt{4\pi^2+2} - \frac{2}{3} (4\pi^2+2) \sqrt{4\pi^2+2} - \frac{4}{5} \sqrt{2} + \frac{4}{3} \sqrt{2} =$$

$$14 = \frac{2}{15} (6\pi^4 + \pi^2 - 1) \sqrt{4\pi^2 + 2} + \sqrt{2}$$

Esercizio 5

a)



Sia $D = \text{dom}(f)$

Essendo D compatto ed essendo f continua, per il teorema di Weierstrass, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme dei punti di massimo o di minimo assoluti di f

Sia $(x, y) \in D^0$

Sicché $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 \neq 0$

Sicché quindi

$$E \cap D^0 = \emptyset$$

Sicché

$$F_2(D) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$$

Sia

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

$F_2(D)$ è la sottovarietà di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 differenziale di equazione cartesiana $g(x, y) = 0$

Identifichiamo f con la funzione

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow 5x + 3y$$

Se $(x, y) \in E \cap F_2(D)$, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\text{grad } f(x, y) = \lambda \text{ grad } g(x, y)$$

cioè tale che

$$(5, 3) = \lambda \left(\frac{1}{2}x, \frac{2}{3}y \right)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 5 = \frac{1}{2} \lambda x \\ 3 = \frac{2}{3} \lambda y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{10}{\lambda}, \quad y = \frac{27}{2\lambda} \quad ; \text{ quindi}$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{10}{\lambda} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{27}{2\lambda} \right)^2 = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\frac{100}{4\lambda^2} + \frac{81}{4\lambda^2} = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\frac{181}{4\lambda^2} = 1 \quad ; \text{ quindi}$$

$$\lambda^2 = \frac{181}{4} \quad \text{quindi}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{181}}{2}$$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{181}}{2}$ si ha

$$x = 10 \cdot \frac{2}{\sqrt{181}} = \frac{20 \sqrt{181}}{181}$$

$$y = \frac{27}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{181}} = \frac{27 \sqrt{181}}{181}$$

Si trova $(x, y) = \left(\frac{20}{181} \sqrt{181}, \frac{27}{181} \sqrt{181} \right)$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{181}}{2}$ si trova analogamente

$$(x, y) = \left(-\frac{20}{181} \sqrt{181}, -\frac{27}{181} \sqrt{181} \right)$$

Si ha quindi:

$$E \cap F_2(D) \subset \left\{ \left(\frac{20}{181} \sqrt{181}, \frac{27}{181} \sqrt{181} \right), \left(-\frac{20}{181} \sqrt{181}, -\frac{27}{181} \sqrt{181} \right) \right\}$$

Si ha quindi:

$$E \subset \left\{ \left(\frac{20}{181} \sqrt{181}, \frac{27}{181} \sqrt{181} \right), \left(-\frac{20}{181} \sqrt{181}, -\frac{27}{181} \sqrt{181} \right) \right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{20}{181} \sqrt{181}, \frac{27}{181} \sqrt{181}\right) = \frac{100}{181} \sqrt{181} + \frac{81}{181} \sqrt{181} = \sqrt{181}$$

e

$$f\left(-\frac{20}{181} \sqrt{181}, -\frac{27}{181} \sqrt{181}\right) = -\sqrt{181}$$

Si ha quindi:

$$\max(f) = \sqrt{181}, \quad \min(f) = -\sqrt{181}$$

Esercizio 6

L'equazione differenziale è a variabili separabili,
definite per $x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$.

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x}{\sqrt{y}} \\ y(0) = 1 \end{cases}, x \in \mathbb{R}, y > 0$$

è equivalente a

$$\begin{cases} \sqrt{y} y' = x \\ y(0) = 1 \end{cases}, x \in \mathbb{R}, y > 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente
all'equazione implicita di incognita $y(x)$
tale che $0 \in \text{dom}(y)$

$$\int_1^y \sqrt{t} dt = \int_0^x t dt, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

cioè

$$\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^y = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

cioè

$$\frac{2}{3} \left(y^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{2} x^2, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0$$

$$\text{cioè } y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4} x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

$$\text{cioè } y = \left(\frac{3}{4} x^2 + 1 \right)^{\frac{2}{3}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{3}{4} x^2 + 1 \right)^{\frac{2}{3}}$$

Esercizio 7

Si tratta di un problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale lineare non omogenea

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata è

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Una soluzione è $\lambda = -1$.

Eseguendo la divisione $(\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1) : (\lambda + 1)$ si trova

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 &= (\lambda + 1)(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1) = \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^2(\lambda + 1) + (\lambda + 1)) = \\ &= (\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

L'equazione caratteristica ha quindi

$\lambda = -1$ doppia e $\lambda = \pm i$ semplici

Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata è quindi

$$\varphi_1(x) = e^{-x}, \quad \varphi_2(x) = x e^{-x}, \quad \varphi_3(x) = \cos x, \quad \varphi_4(x) = \sin x$$

Esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\psi(x) = (A + Bx)e^x$$

è soluzione dell'equazione non omogenea

Se ne

$$\psi'(x) = B e^x + (A + Bx)e^x = (A + B + Bx)e^x$$

$$\psi''(x) = B e^x + (A + B + Bx)e^x = (A + 2B + Bx)e^x$$

$$\psi'''(x) = B e^x + (A + 2B + Bx)e^x = (A + 3B + Bx)e^x$$

$$\psi^{(4)}(x) = B e^x + (A + 3B + Bx)e^x = (A + 4B + Bx)e^x$$

La funzione ψ è soluzione dell'equazione non omogenea se e solo se

$$(A + 4B + Bx)e^x + 2(A + 3B + Bx)e^x + 2(A + 2B + Bx)e^x + 2(A + B + Bx)e^x + (A + Bx)e^x = 8x e^x$$

cioè se e solo se

$$A + 4B + Bx + 2A + 6B + 2Bx + 2A + 4B + 2Bx + 2A + 2B + 2Bx$$

$$+ A + Bx = 8x$$

coe se e solo se

$$8A + 16B + 8BX = 8X$$

coe se e solo se

$$A + 2B + BX = X$$

coe se e solo se

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

coe se e solo se $A = -2$ e $B = 1$

Si ha quindi

$$y(x) = (-2 + x)e^x$$

Un integrale generale dell'equazione non omogenea è quindi

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - 2e^x + xe^x$$

Si ha

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x - 2e^x + xe^x$$

$$+ e^x + xe^x = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} - C_3 \sin x + C_4 \cos x - e^x + xe^x$$

$$y''(x) = C_1 e^{-x} - C_2 e^{-x} - C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

$$- 2e^x + e^x + e^x + xe^x =$$

$$= C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x + xe^x$$

$$\begin{aligned}
 y'''(x) &= -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + C_3 \sin x \\
 &\quad - C_4 \cos x + e^x + x e^x = \\
 &= -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x} + C_3 \sin x - C_4 \cos x + e^x + x e^x
 \end{aligned}$$

La funzione $y(x)$ è soluzione del problema di boundary se e solo se

$$\begin{cases}
 C_1 + C_3 - 2 = -2 \\
 -C_1 + C_2 + C_4 - 1 = 0 \\
 C_1 - 2C_2 - C_3 = 0 \\
 -C_1 + 3C_2 - C_4 + 1 = 0
 \end{cases} \quad \text{case}$$

$$\begin{cases}
 C_3 = -C_1 \\
 -C_1 + C_2 + C_4 = 1 \\
 C_1 - 2C_2 + C_4 = 0 \\
 -C_1 + 3C_2 - C_4 = -1
 \end{cases} \quad \text{case}$$

$$\begin{cases}
 C_3 = -C_1 \\
 -C_1 + C_2 + C_4 = 1 \\
 2C_1 - 2C_2 = 0 \\
 -C_1 + 3C_2 - C_4 = -1
 \end{cases} \quad \text{case}$$

$$\begin{cases} c_3 = -c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \end{cases}$$

così

$$-c_1 + c_1 + c_4 = 1$$

$$-c_1 + 3c_1 - c_4 = -1$$

$$\begin{cases} c_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \end{cases}$$

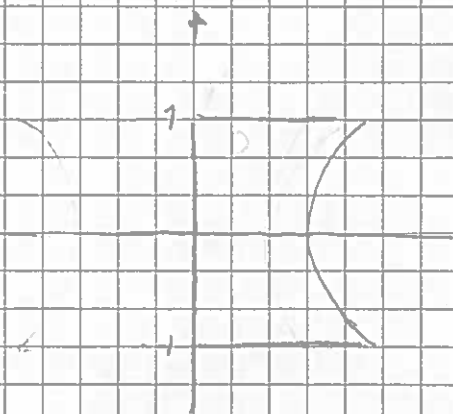
$$\begin{cases} c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_4 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del problema di Bending è quindi

$$u(x) = \sin x - 2e^x + xe^x$$

Esercizio 8



Si ha $P_2(D) = [-1, 1]$

e per ogni $y \in [-1, 1]$

si ha

$$D(y) = [0, \sqrt{1-y^2}]$$

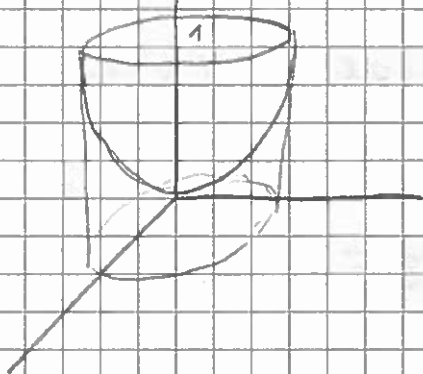
Si ha quindi

$$\iint_D x \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1+y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left[y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Esercizio 9



Sia $P_{1,2}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}$

e per $(x,y) \in P_{1,2}(D)$ si ha

$$D(x,y) = \left[0, \frac{x^2+y^2}{2} \right]$$

Sia

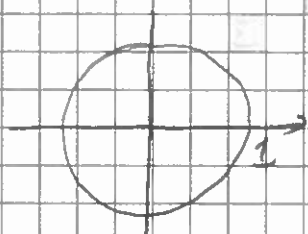
$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2) dx dy dz = \iint_{P_{1,2}(D)} \left(\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} (x^2+y^2+z^2) dz \right) dx dy$$

$$= \iint_{P_{1,2}(D)} \left[x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy =$$

$$= \iint_{P_{1,2}(D)} \left(x^2 \frac{x^2+y^2}{2} + y^2 \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+y^2}{2} \right)^3 \right) dx dy =$$

$$= \iint_{P_{1,2}(D)} \left(\frac{(x^2+y^2)^2}{2} + \frac{(x^2+y^2)^3}{24} \right) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \left((x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{12} (x^2 + y^2)^3 \right) dx dy$$



Una parametrizzazione in
misura di $p_{1,2}(D)$ è la funzione
 φ

$$\begin{cases} x = \rho \cos t \\ y = \rho \sin t \end{cases} \quad (\rho, t) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

Per ogni $(\rho, t) \in \text{dom}(\varphi)$ si ha $|\det \varphi'(\rho, t)| = \rho$
si ha quindi:

$$\frac{1}{2} \iint_D \left((x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{12} (x^2 + y^2)^3 \right) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{[0, 1] \times [0, 2\pi]} \left(\rho^4 + \frac{1}{12} \rho^6 \right) \rho \, d\rho \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \left(\rho^5 + \frac{1}{12} \rho^7 \right) d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{6} \rho^6 + \frac{1}{96} \rho^8 \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{96} \right) =$$

$$= \frac{17}{96} \pi$$