Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 1

[1]. (***) **Definizione di derivata parziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $k = 1, 2, \ldots, N$; sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la derivata parziale di f secondo l'indice k in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di soluzione di un problema implicito in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.** Sia $A \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia I un intervallo di $\mathbf{R}$ tale che $x_0 \in I$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione del problema implicito di incognita $y(x)$, $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a, b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano a, b continue; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione di (scrivere l'equazione differenziale) ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione della area di una superficie utilizzando l'espressione del graamiano.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione 2; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A 2-misurabile; sia $D \subset \mathbf{R}^2$; sia D aperto; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione di V; sia $P = \varphi^{-1}(A)$; allora si ha (esprimere l'area di A utilizzando l'espressione del graamiano per $m = 2$) $\mathrm{mis}_m(A) = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Dire se il problema implicito di incognita $z(x, y)$ $\begin{cases} x^3 + xy^2 + y^3 - y + xz - z = 0 \\ z(0, 0) = 0 \end{cases}$ ammette soluzione.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni implicite. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Dare la definizione di soluzione di un'equazione implicita $f(x, y) = 0$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
2. ** Dare la definizione di soluzione di un problema $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
3. ** Enunciare il teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
4. ** Dare la definizione di soluzione di un'equazione implicita $f(x, y) = 0$ in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.
5. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 2

[1]. (***) **Definizione di soluzione di un'equazione differenziale scalare $F(x,y,y')=0$.** Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^3$; sia $F:\Omega \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione differenziale $F(x,y,y')=0$ se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di spazio tangente ad una sottovarietà parametrizzabile differenziale in un punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m; sia $x_0 \in V$; sia D un aperto di $\mathbf{R}^m$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una parametrizzazione di V; sia $t_0 \in D$ tale che $\varphi(t_0) = x_0$; allora lo spazio tangente a V in x_0 è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della primitiva di una forma differenziale attraverso le derivate parziali.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N;\mathbf{R})$; sia $\omega = \sum_{i=1}^N \omega_i dx_i$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; allora f è una primitiva di ω se e solo se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'integrale improprio come integrale di Lebesgue.** Sia $a \in \mathbf{R}$; sia $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$; sia $f \geq 0$; sia f continua; allora l'integrale di Lebesgue della funzione misurabile positiva f ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 (3-x)^5\, dx\ .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni implicite. Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata.
2. * Enunciare e dimostrare il teorema riguardante la matrice della derivata.
3. ** Enunciare il teorema di Dini in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.
4. ** Dare la definizione di soluzione di un'equazione implicita $f(x,y)=0$ in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.
5. ** Enunciare il teorema di Dini in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 3

[1]. (***) **Definizione di integrale inferiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; allora l'integrale inferiore di f è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla espressione di una primitiva di una forma differenziale esatta attraverso gli integrali su traiettorie.**: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A connesso; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $a \in A$; allora una primitiva di ω è la funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $f(x) = \int_\varphi \omega$ dove φ ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di matrice jacobiana in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; per ogni $k = 1, 2, \ldots, N$ sia f derivabile parzialmente secondo l'indice k in a; allora la matrice jacobiana di f in a è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale a variabili separate.** Siano A, B intervalli non banali di $\mathbf{R}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $g : B \longrightarrow \mathbf{R}$; f e g siano continue; sia F è una primitiva di f; sia G una primitiva di g; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$ e $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; allora φ è soluzione dell'equazione differenziale di incognita $y(x)$,

$$g(y)y' = f(x)$$

se e solo ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{y^2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione massimale per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x)$.
4. * Dare la definizione di soluzione per un sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.
5. * Esprimere scalarmente il sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 4

[1]. (***) **Definizione di somma inferiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma inferiore di f, $s(f, \sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di insieme stellato rispetto ad un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; si dice che A è stellato rispetto ad a se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione delle forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.**: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti: ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo come sottospazio vettoriale.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $a : I \longrightarrow \mathbf{M}_N(\mathbf{R}^N)$; sia a continua; sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale vettoriale omogenea $y' = a(x)y$; allora $\mathcal{S}$ ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = \sin x \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale chiusa.
2. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
3. *** Enunciare e dimostrare il teorema sul rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
4. ** Enunciare il teorema che caratterizza le forme differenziali esatte attraverso gli integrali su traiettorie.
5. * Dire come si ottiene una primitiva di una forma differenziale esatta attraverso gli integrali curvilinei.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 5

[1]. (***) **Teorema sull'espressione dell'incremento di una funzione differenziabile.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; allora ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla espressione di una primitiva di una forma differenziale esatta attraverso gli integrali su traiettorie.**: Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia A connesso; sia ω una forma differenziale su A; sia ω continua; sia ω esatta; sia $a \in A$; allora una primitiva di ω è la funzione $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in A$ si ha $f(x) = \int_\varphi \omega$ dove φ ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di funzione di Riemann.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è una funzione di Riemann su A se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'espressione di x attraverso la sua parte positiva e la sua parte negativa.** Sia $x \in \overline{\mathbf{R}}$; allora si ha $x = \ldots$;

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale di superficie: $\int\int_S x\, ds$ dove $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale d'ordine n.
3. * Spiegare l'equivalenza fra un'equazione differenziale d'ordine n e un sistema di n equazioni del primo ordine.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema sulle soluzioni costanti di un'equazione a variabili separabili.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 6

[1]. (***) **Definizione di somma superiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma superiore di f, $S(f, \sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della differenziabilità in un punto attraverso l'espressione dell'incremento della funzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora f è differenziabile in a se e solo se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di spazio tangente ad una sottovarietà parametrizzabile differenziale in un punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m; sia $x_0 \in V$; sia D un aperto di $\mathbf{R}^m$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una parametrizzazione di V; sia $t_0 \in D$ tale che $\varphi(t_0) = x_0$; allora lo spazio tangente a V in x_0 è ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di soluzione per un'equazione differenziale d'ordine n.** Sia $n \in \mathbf{N}^*$; sia $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+2}$; sia $F : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che φ è soluzione dell'equazione differenziale di ordine n di funzione incognita $y(x)$

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

se si ha ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -2y - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi su un aperto e gradiente.
2. *Dare la definizione di forma bilineare su $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ e di matrice di una forma bilineare,
3. * Dare la definizione di forma bilineare simmetrica.
4. * Enunciare i due teoremi che caratterizzano le forme bilineari simmetriche con i determinanti dei minori principali.
5. ** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi e differenziale secondo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 7

[1]. (***) **Definizione di derivata direzionale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $e \in \mathbf{R}^N$; sia $\|e\| = 1$; sia f derivabile secondo la direzione e in a; allora la derivata di f secondo la direzione e in a è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di primitiva di una forma differenziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $\omega : A \longrightarrow \mathrm{L}(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si dice che f è una primitiva di ω se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di matrice Hessiana di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; allora $\mathcal{H}f(a)$ è la matrice ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di funzione di classe C^∞.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; si dice che f è di classe C^∞ se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^1 e^{2x+3}\, dx \,.$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione continua positiva definita su un compatto.
2. * Dare la definizione di insieme misurabile secondo Lebesgue.
3. * Dare la definizione di funzione misurabile secondo Lebesgue.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio D sull'asse x, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(x)$.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli, con proiezione del dominio D sul piano xy, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(x, y)$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 8

[1]. (***) **Teorema sulle soluzioni di un'equazione differenziale lineare d'ordine n non omogenea.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $b : I \longrightarrow \mathbf{R}$; siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b continue; sia $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N)$ un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$; sia ψ una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = b(x)$; allora ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di misura di un insieme misurabile.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A misurabile; si pone $\mathrm{mis}(A) = \ldots$

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si chiama equazione differenziale di forma normale di funzione incognita $y(x)$ corrispondente a f l'equazione differenziale di incognita $y(x)$, ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'integrale di Riemann come integrale di Lebesgue.** Sia $I \in \mathrm{I}_{R^N}$; sia $f \in \mathcal{R}(I)$; sia $f \geq 0$; allora l'integrale di Riemann di f su I ...

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare una base per lo spazio tangente alla sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ definita dalla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t^2 \\ z = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}$$

nel punto corrispondente al valore $t = 1$ del parametro.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di forme differenziali. Differenziabilità.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizioni di basi di uno spazio vettoriale equivalenti.
2. * Dire che cosa significa orientare uno spazio vettoriale (o che cosa è uno spazio vettoriale orientato).
3. ** Dare la definizione di integrale di una m-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione m.
4. *** Come si esprime l'integrale di una 1-forma su un sottoinsieme di una sottovarietà differenziale parametrizzabile orientata di dimensione 1?
5. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata di una funzione in un punto.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 9

[1]. (***) **Teorema sulla espressione della matrice della derivata.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla condizione necessaria per un punto di minimo relativo e differenziale secondo.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; sia $df(a) = 0$; ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Teorema sul sistema fondamentale di soluzioni reale di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti nel caso di radici complesse dell'equazione caratteristica.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{R}$; sia $\lambda = \sigma + i\tau$ una radice complessa di molteplicità m dell'equazione caratteristica dell'equazione differenziale a coefficienti costanti $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$; allora a λ e al coniugato di λ corrispondono nel sistema fondamentale di soluzioni reali le $2m$ soluzioni ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sull'integrale di funzioni uguali quasi dappertutto.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; siano $f, g \in \mathcal{R}(I)$; allora si ha ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere la seguente equazione differenziale $y' = xy$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di funzione differenziabile in un punto e di derivata.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema riguardante l'espressione dell'incremento di una funzione differenziabile in un punto (approssimazione dell'incremento attraverso la derivata).
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema che caratterizza la differenziabilità mediante l'espressione dell'incremento di una funzione.
4. * Enunciare e dimostrare il teorema riguardante la differenziabilità per funzioni di una variabile.
5. ** Enunciare il teorema del differenziale totale (condizione sufficiente per la differenziabilità)

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 10

[1]. (***) **Definizione di somma inferiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; sia σ una scomposizione di I; allora la somma inferiore di f, $s(f, \sigma)$ è ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla caratterizzazione della differenziabilità in un punto attraverso l'espressione dell'incremento della funzione.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; allora f è differenziabile in a se e solo se ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di insieme stellato rispetto ad un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in A$; si dice che A è stellato rispetto ad a se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema di Dini in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^M$; sia A aperto; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[5]. (E) Trasformare il seguente integrale mediante cambiamento di variabile ponendo e $^x = t$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx \; .$$

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. ** Enunciare il teorema sull'integrale sul prodotto cartesiano di due insiemi misurabili, per una funzione misurabile positiva.
2. * Definire l'immagine $G(x)$ di un punto mediante un insieme $G \subset A \times B$.
3. ** Enunciare il teorema sull'integrale su un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$, per una funzione misurabile positiva.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio sull'asse x, per funzioni misurabili positive.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio sull'asse y, per funzioni misurabili positive.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 11

[1]. (***) **Teorema fondamentale del calcolo integrale.** Sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; supponiamo che per ogni $a, b \in I$, con $a < b$ sia $f|[a,b] \in \mathcal{R}([a,b])$; sia $x_0 \in I$; sia F la funzione integrale di f di punto iniziale x_0; sia $x \in I$, sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sulla base per lo spazio normale ad una sottovarietà in un suo punto.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}^*$; sia $m \leq N$; sia V è una sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^N$ parametrizzabile di dimensione m; sia $x_0 \in V$; sia U un intorno aperto di x_0; sia $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^{N-m}$; sia f di classe C^1; sia $U \cap V = \{x \in U; f(x) = 0\}$; sia $(\forall x \in U)$ rango$(f'(x) = N - m$; allora una base dello spazio normale a V in x_0 è ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di derivabilità parziale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia $k = 1, 2, \ldots, N$; si dice che f è derivabile parzialmente secondo l'indice k in a se ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla relazione fra integrale inferiore ed integrale superiore.** Sia I un intervallo di I_{R^N}; sia $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f limitata; allora ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D y \, dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \leq 0, y \geq 0, -x + y \leq 1\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di soluzione complessa per una equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea a coefficienti costanti.
2. *** Enunciare e dimostrare il teorema sulle soluzioni del tipo $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ di una equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea a coefficienti costanti.
3. * Enunciare il teorema sulla base dello spazio vettoriale delle soluzioni per una equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea a coefficienti costanti nel caso in cui l'equazione caratteristica abbia n radici distinte.
4. *** Enunciare il teorema sulla base dello spazio vettoriale delle soluzioni per una equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea a coefficienti costanti nel caso generale.
5. * Spiegare come si trova un sistema fondamentale di soluzioni nel caso di una equazione differenziale lineare d'ordine n omogenea a coefficienti costanti **reali**.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 12

[1]. (***) **Teorema fondamentale sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale di tipo normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di integrale di una m-forma.** Sia A un aperto di $\mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia ω una m-forma differenziale su A; sia $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq N} \omega_{i_1, i_2, \ldots, i_m} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m}$; sia $V \subset A$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m parametrizzabile orientata; sia D un aperto di $\mathbf{R}^m$; sia $\varphi : D \longrightarrow \mathbf{R}^N$; sia φ una parametrizzazione positiva di V; sia $M \subset V$; sia M m-misurabile; sia $P = \varphi^{-1}(M)$; sia ω m-misurabile su M; sia ω m-integrabile su M; allora si pone $\int_M \omega = \ldots$

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di differenziale secondo di una funzione in un punto.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia A aperto; sia $a \in A$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia f di classe C^2; allora $d^2 f(a)$ è la funzione ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema su un diffeomorfismo legato alle coordinate polari.** Sia $A =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$; sia $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; y \neq 0 \text{ o } x < 0\}$; definire un diffeomorfismo $g : A \longrightarrow B$ legato alle coordinate polari.

RISPOSTA

[5]. (E) Determinare una base per lo spazio normale alla sottovarietà differenziale di $\mathbf{R}^3$ definita dalla equazione cartesiana

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

in un punto (x_0, y_0, z_0) della sottovarietà.

RISPOSTA

[6]. (O) **Equazioni differenziali.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di soluzione per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
2. * Dare la definizione di soluzione massimale per un'equazione differenziale scalare $F(x, y, y') = 0$.
3. ** Enunciare e dimostrare il teorema sull'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(x)$.
4. * Dare la definizione di soluzione per un sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.
5. * Esprimere scalarmente il sistema di equazioni differenziali $F(x, y, y') = 0$.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 13

[1]. (***) **Teorema fondamentale sul problema di Cauchy per un'equazione differenziale di tipo normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale sul prodotto di due insiemi misurabili di una funzione misurabile positiva.** Sia A un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^N$; sia B un sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}^M$; sia $f : A \times B \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile e positiva; allora si ha ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di coordinate sferiche in $\mathbf{R}^3$.** Sia $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2$; sia $\rho > 0$; siano $\varphi, \theta \in \mathbf{R}$; si dice che (ρ, φ, θ) è coordinata sferica di (x, y, z) se si ha ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di somma di una famiglia numerabile di numeri positivi.** Sia A un insieme numerabile; sia $(a_i)_{i \in A}$ una famiglia di numeri reali positivi; sia $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow A$ biettiva; (gli elementi a_i possono dunque essere scritti in un solo modo nella forma $a_{\sigma(n)}$) si pone $\sum_{i \in A} a_i = \ldots$

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{t^2}\, dt$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Calcolo differenziale in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi su un aperto e gradiente.
2. *Dare la definizione di forma bilineare su $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ e di matrice di una forma bilineare,
3. * Dare la definizione di forma bilineare simmetrica.
4. * Enunciare i due teoremi che caratterizzano le forme bilineari simmetriche con i determinanti dei minori principali.
5. ** Enunciare il teorema sul rapporto fra estremanti relativi e differenziale secondo.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 14

[1]. (***) **Teorema sulla espressione della matrice della derivata.** Sia $A \subset \mathbf{R}^N$; sia $a \in \overset{\circ}{A}$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}^M$; sia f differenziabile in a; ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Teorema sull'integrale su un sottoinsieme del prodotto cartesiano di una funzione misurabile positiva.** Sia $A \in \mathrm{M}_{R^N \times R^M}$; sia $\mathrm{pr}_1(A)$ misurabile; sia $f : A \longrightarrow \overline{\mathbf{R}}$; sia f misurabile; sia $f \geq 0$; allora ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; sia $(x_0, y_0) \in A$; sia I un intervallo non banale di $\mathbf{R}$; sia $\varphi : I \longrightarrow \mathbf{R}$; allora φ è soluzione del problema di Cauchy ...

RISPOSTA

[4]. (*) **Teorema sulla caratterizzazione di una forma bilineare simmetrica in $\mathbf{R}^2$ con determinante della matrice > 0 e $a_{1,1} > 0$.** (Considerando gli N minori principali 'in discesa'.) Sia $T : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineare simmetrica; sia $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\ldots,2}$ la matrice di T; sia $\det(a) > 0$ e $a_{1,1} > 0$; allora T è ...

RISPOSTA

[5]. (E) Calcolare il seguente integrale $\int\int_D x\,dxdy$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2; x \leq 1, x \geq y^2\}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Forme differenziali lineari.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. *** Dare la definizione di forma differenziale esatta.
2. *** Dire il rapporto fra forme differenziali chiuse e forme differenziali esatte.
3. * Dare la definizione di potenziale (o primitiva) di un campo di vettori. Dare la definizione di campo di vettori esatto (o conservativo)
4. ** Dare la definizione di integrale di una forma differenziale su una traiettoria.
5. ** Enunciare il teorema sull'integrale su una traiettoria del differenziale di una funzione. Dimostrare il teorema sull'integrale del differenziale di una funzione.

RISPOSTA

Cognome Nome Matricola Codice ESEMPIO 15

[1]. (***) **Teorema sulla condizione affinchè $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ sia una soluzione di un'equazione differenziale lineare d'ordine n a coefficienti costanti.** Siano $a_1, a_2, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$; sia $\varphi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $t \longrightarrow e^{\lambda t}$; allora φ è soluzione di $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ se e solo se ...

RISPOSTA

[2]. (**) **Definizione di equazione differenziale di forma normale.** Sia $A \subset \mathbf{R}^2$; sia $f : A \longrightarrow \mathbf{R}$; si chiama equazione differenziale di forma normale di funzione incognita $y(x)$ corrispondente a f l'equazione differenziale di incognita $y(x)$, ...

RISPOSTA

[3]. (**) **Definizione di misura di un insieme su una sottovarietà parametrizzabile.** Sia $V \subset \mathbf{R}^N$; sia $m \in \mathbf{N}$; sia $0 < m \leq N$; sia V una sottovarietà differenziale di dimensione m; sia V parametrizzabile; sia $A \subset V$; sia A m-misurabile; si pone $\text{mis}_m(A) = \ldots$.

RISPOSTA

[4]. (*) **Definizione di traiettoria chiusa.** Sia $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^N$ una traiettoria di $\mathbf{R}^N$; si dice che φ è una traiettoria chiusa se ...

RISPOSTA

[5]. (E) Risolvere il seguente problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

RISPOSTA

[6]. (O) **Integrale di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.** Rispondere alle seguenti domande, esplicitando le ipotesi:

1. * Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori finiti.
2. * Dare la definizione di integrale della costante $+\infty$. Dare la definizione di integrale di Lebesgue di una funzione misurabile positiva a valori in $\overline{\mathbf{R}}$.
3. * Dare la definizione di integrale di una funzione misurabile positiva convergente e di integrale divergente positivamente.
4. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali doppi, con proiezione del dominio sull'asse y, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(y)$.
5. *** Enunciare il teorema sulle formule di riduzione per gli integrali tripli, con proiezione del dominio sull'asse z, per funzioni misurabili positive, spiegando e definendo il simbolo $D(z)$..

RISPOSTA