Analisi Matematica 2 - Parziale - 9/4/14

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale: ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = \sin(xe^{y^2}) \; ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \; .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (x^2y, x-y) \; ;$$

determinare la derivata direzionale

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})} f(1,2) \; .$$

Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x,y)$

$$\begin{cases} \log(x^2+y^2+z^2+1) - x - y - z = 0 \\ z(0,0) = 0 \end{cases} ,$$

   (a) provare che esiste un aperto connesso su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$.

Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (superficie) definita dalla equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1, \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

in un punto generico (x_0, y_0, z_0) di questa.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x^3 - 3x^2y + y^3 - 3y + 1 \ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1 + (x^2 + y^2)^2} \, dx + \frac{y}{1 + (x^2 + y^2)^2} \, dy \ .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{x}{1+(x^2+y^2)^2}\,dy\ .$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Data la funzione

$$f : \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 1\} \longrightarrow \mathbf{R}, (x,y,z) \longrightarrow 5x - 2y + 3z\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

9. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = (y')^2 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.