Analisi Matematica 2 - Parziale - Aprile 2015

Cognome Nome, matricola, e-mail istituzionale: ...

1. (p. 3) Sia f la funzione (reale, di variabili reali) definita naturalmente da

$$f(x,y) = \sin(xe^{y^2}) \ ;$$

   (a) determinare il dominio naturale di f;

   (b) determinare il gradiente di f in un punto generico del dominio;

   (c) determinare la trasformazione lineare differenziale di f in un punto generico del dominio, esprimendola nella forma

$$T : V \longrightarrow W, h \longrightarrow \mathcal{T}\{h\} \ .$$

   (d) esprimere il differenziale come combinazione lineare delle forme lineari dx_i.

   Svolgimento e risposta.

2. (p. 2) Sia

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, (x,y) \longrightarrow (x^2y, x-y) \ ;$$

   determinare la derivata direzionale

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})}f(1,2) \ .$$

   Svolgimento e risposta.

3. (p. 3) Assegnato il problema con equazione implicita di funzione incognita $z(x,y)$

$$\begin{cases} \log(x^2+y^2+z^2+1) - x - y - z = 0 \\ z(0,0) = 0 \end{cases} ,$$

   (a) provare che esiste un aperto connesso su cui il problema ammette una ed una sola soluzione,

   (b) chiamata φ tale soluzione, calcolare $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)$.

   Svolgimento e risposta.

4. (p. 3) Trovare delle equazioni parametriche o cartesiane dello spazio tangente, della varietà lineare tangente, dello spazio normale, della varietà lineare normale alla sottovarietà (superficie) definita dalla equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1, \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

in un punto generico (x_0, y_0, z_0) di questa.

Svolgimento e risposta.

5. (p. 3) Determinare e classificare gli estremanti relativi della seguente funzione

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x, y) \longrightarrow 2x^3 - 3x^2y + y^3 - 3y + 1 \ .$$

Svolgimento e risposta.

6. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{x}{1 + (x^2 + y^2)^2} \, dx + \frac{y}{1 + (x^2 + y^2)^2} \, dy \ .$$

Svolgimento e risposta.

7. (p. 2) Dire se la seguente forma differenziale è esatta e, in caso affermativo, determinarne l'insieme delle primitive:

$$\frac{y}{1+(x^2+y^2)^2}\,dx+\frac{x}{1+(x^2+y^2)^2}\,dy\;.$$

Svolgimento e risposta.

8. (p. 5) Data la funzione

$$f:\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2\le 1,\ -1\le z\le 1\}\longrightarrow\mathbf{R},(x,y,z)\longrightarrow 5x-2y+3z\ ,$$

(a) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo;

(b) in caso affermativo, determinare il minimo ed il massimo di f.

Svolgimento e risposta.

4

9. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

10. (p. 5) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = (y')^2 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

Svolgimento e risposta.

Versione 1

Esercizio 1

a) Si ha $dom(f) = R^2$

b) Per ogni $(x,y) \in R^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(xe^{y^2})\, e^{y^2} = e^{y^2}\cos(xe^{y^2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(xe^{y^2})\, xe^{y^2}\, 2y = 2xye^{y^2}\cos(xe^{y^2})$$

Si ha quindi

$$grad\, f(x,y) = \left(e^{y^2}\cos(xe^{y^2}),\ 2xye^{y^2}\cos(xe^{y^2})\right)$$

c) Sia $(x,y) \in R^2$. Si ha

$$df(x,y): R^2 \to R,\ (h_1,h_2) \to e^{y^2}\cos(xe^{y^2})h_1 + 2xye^{y^2}\cos(xe^{y^2})h_2$$

d) Si ha

$$df(x,y) = e^{y^2}\cos(xe^{y^2})\,dx + 2xye^{y^2}\cos(xe^{y^2})\,dy$$

Esercizio 2

Per ogni $(x,y) \in R^2$ la matrice jacobiana di f in (x,y) è

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi

$$f'(1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La trasformazione lineare $f'(1,2)$ è quindi

$$f'(1,2): R^2 \to R^2,\ (h_1,h_2) \to (4h_1 + h_2,\ h_1 - h_2)$$

Si ha quindi

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right)} f(1,2) = f'(1,2)\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right) = \left(\frac{4}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}, \frac{1}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\right) =$$

$$= \left(\frac{6}{\sqrt5}, -\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

Esercizio 3

a) Sia

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longrightarrow \log(x^2+y^2+z^2+1) - x - y - z$$

Si ha

$$f(0,0,0) = 0$$

Per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} - 1$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = -1 \neq 0$$

Quindi per il teorema di Dini esiste un aperto connesso I su cui il problema ammette una ed una sola soluzione

b) Per ogni $(x,y) \in I$ si ha

$$\log(x^2+y^2+(\varphi(x,y))^2+1) - x - y - \varphi(x,y) = 0$$

Si ha quindi

$$\frac{1}{x^2+y^2+(\varphi(x,y))^2+1}\left(2x + 2\varphi(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right) - 1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0$$

Per $(x,y)=(0,0)$, essendo $\varphi(0,0)=0$, si ha

$$-1-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)=0$$

quindi $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)=-1$

Si ha

$$\frac{1}{x^2+y^2+(\varphi(x,y))^2+1}\left(2y+2\varphi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)-1-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=0$$

Per $(x,y)=(0,0)$, essendo $\varphi(0,0)=0$, si ha

$$-1-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=0$$

quindi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=-1$$

Esercizio 4

Sia

$f: R^3\to R,\quad (x,y,z)\to x^2+y^2-z^2-1$

Per ogni $(x,y,z)\in R^3$ si ha

$$\text{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)$$

Una base dello spazio normale alla varietà in (x_0,y_0,z_0) è quindi $(2x_0, 2y_0, -2z_0)$

Un'altra base è quindi

$$(x_0,\ y_0,\ -z_0)$$

Delle equazioni parametriche dello spazio normale sono quindi

$$(x,y,z)=t\,(x_0,y_0,-z_0)\ ,\quad t\in R\ ,$$

cioè

$$\begin{cases} x = t x_0 \\ y = t y_0 \qquad t \in R \\ z = -t z_0 \end{cases}$$

Delle equazione parametriche della retta normale sono quindi

$$(x, y, z) = t\,(x_0, y_0, -z_0) + (x_0, y_0, z_0) \quad , \ t \in R$$

cioè

$$\begin{cases} x = t x_0 + x_0 \\ y = t y_0 + y_0 \quad , \quad t \in R \\ z = -t z_0 + z_0 \end{cases}$$

Delle equazioni cartesiane dello spazio tangente sono quindi

$$\big((x, y, z) \mid (x_0, y_0, -z_0) \big) = 0$$

cioè

$$x x_0 + y y_0 - z z_0 = 0$$

Delle equazioni cartesiane del piano tangente sono quindi

$$\big((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \mid (x_0, y_0 - z_0) \big) = 0$$

cioè

$$(x - x_0) x_0 + (y - y_0) y_0 + (z - z_0)(-z_0) = 0$$

cioè

$$x x_0 + y y_0 - z z_0 - x^2 - y_0^2 + z_0^2 = 0 \qquad \text{cioè}$$

$$x x_0 + y y_0 - z z_0 - 1 = 0$$

Esercizio 5

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 + 3y^2$$

I punti critici di f sono le soluzioni di

$$\begin{cases} 6x^2 - 6xy = 0 \\ -3x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases}, \text{ cioè di } \begin{cases} x(x-y) = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Il sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ equivale a } \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}, \text{ cioè a } \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases};$$

l'insieme delle soluzioni è quindi $\{(0,1), (0,-1)\}$

Il sistema

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ equivale a } \begin{cases} x = y \\ -y^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}, \text{ cioè a}$$

$$\begin{cases} x = y \\ -1 = 0 \end{cases}$$; tale sistema non ha soluzioni

L'insieme dei punti critici di f è quindi

$\{(0,1), (0,-1)\}$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x - 6y \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

Si ha quindi

$$\mathcal{H} f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - 6y & -2x \\ -2x & 6y \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{H} f(0,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Quindi $(0,1)$ è un punto di sella

Si ha

$$\mathcal{H}(f)(0,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} < 0$$

Quindi $(0,-1)$ è un punto di sella

Quindi f non ammette estremanti relativi.

Esercizio 6

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to \frac{1}{2} \operatorname{Arctg}(x^2+y^2)$

Per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} 2x = \frac{x}{1+(x^2+y)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} 2y = \frac{y}{1+(x^2+y^2)}$$

Quindi f è una primitiva della forma differenziale

Quindi la forma differenziale è esatta.

L'insieme delle primitive della forma differenziale è

$\{f+c ;\ c \in \mathbb{R}\}$

Esercizio 7

Si ha

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{1+(x^2+y^2)^2} = \frac{1+(x^2+y^2)^2 - y\, 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^4+2x^2y^2+y^4-4x^2y^2-4y^4}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} = \frac{1+x^4-2x^2y^2-3y^4}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(1+(x^2+y^2))^2} = \frac{1+(x^2+y)^2 - x\, 2(x^2+y^2)\, 2x}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^4+2x^2y^2-4x^4-4x^2y^2}{(1+(x^2+y^2)^2)^2} = \frac{1-3x^4-2x^2y^2+y^4}{(1+(x^2+y^2)^2)^2}$$

Si ha quindi

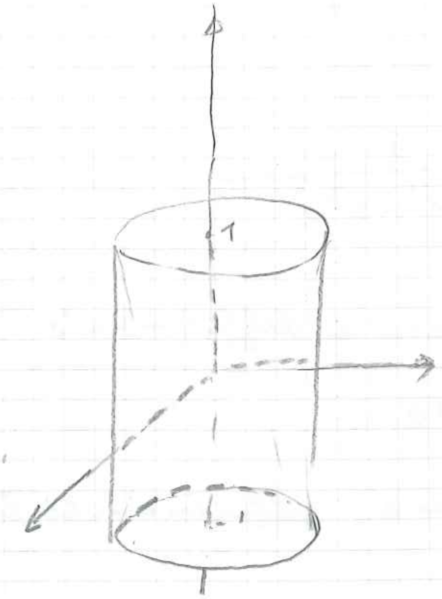
$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{1+(x^2+y^2)^2} \neq \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{1+(x^2+y^2)^2}$$

Quindi la forma differenziale non è chiusa

Quindi non è esatta

8

Esercizio 8



a) Sia $D = dom(f)$

Essendo D compatto ed f continua, f ammette massimo e minimo

b) Sia E l'insieme degli estremanti di f

Sia $(x, y, z) \in \mathring{D}$; si ha

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 5$

Si ha quindi

$E \cap \mathring{D} = \emptyset$

Sia

$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; x^2+y^2 = 1 \;, -1 < z < 1\}$.

$F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; z = 1, \; x^2+y^2 < 1\}$

$F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \; z = -1, \; x^2+y^2 < 1\}$

$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; z = 1, \; x^2+y^2 = 1\}$

$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; z = -1, \; x^2+y^2 = 1\}$

Si ha $Fr(D) = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_5$

Sia $(x, y, z) \in F_1$

Sia

$g : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; -1 < z < 1\} \to \mathbb{R}, \; (x, y, z) \to x^2+y^2-1$

F_1 è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ differenziale di dimensione 2, di equazione cartesiana

$g(x, y, z) = 0$

Identifichiamo f con

$\{(x,y,z) \in R^3;\ -1<z<1\} \to R,\quad (x,y,z) \to 5x-2y+3z$

Se $(x,y,z) \in E$, esiste $\lambda \in R$ tale che

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y,z)$

cioè tale che

$(5,-2,3) = \lambda(2x, 2y, 0)$;

quindi $3=0$; ciò è assurdo

Si ha quindi

$E \cap F_1 = \emptyset$

Sia $(x,y,z) \in F_2$; si ha

$f(x,y,z) = f(x,y,1) = 5x-2y+3$

e $x^2+y^2<1$

Sia

$f_2 : \{(x,y) \in R^2,\ x^2+y^2<1\} \to R,\ (x,y) \to 5x-2y+3$

Sia E_2 l'insieme degli estremanti di f_2

Per ogni $(x,y) \in \operatorname{dom}(f_2)$ si ha

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 5 \neq 0$

Si ha quindi $E_2 = \emptyset$

Si ha quindi

$E \cap F_2 = \emptyset$

Sia $(x,y,z) \in F_3$; si ha

$f(x,y,z) = 5x-2y-3$

e $x^2+y^2<1$.

Sia

$f_3 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2+y^2<1\} \to \mathbb{R}, \ (x,y) \to 5x-2y-3$

Sia E_3 l'insieme degli estremanti di f_3

Per ogni $(x,y) \in dom(f_3)$ si ha

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = 5 \neq 0$$

Si ha quindi $E_3 = \emptyset$

Quindi

$$E \cap F_3 = \emptyset$$

Sia $(x,y,z) \in F_4$. Sia

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ (x,y,z) \to (x^2+y^2-1, \ z-1)$$

F_4 è una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$, di dimensione 1 di equazione cartesiana $g(x,y,z) = (0,0)$.

Se $(x,y,z) \in F_4$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\text{grad} f(x,y,z) = \lambda \, \text{grad}\, h_1(x,y,z) + \mu \, \text{grad}\, h_2(x,y,z)$$

cioè tali che

$$(5,-2,3) = \lambda(2x,2y,0) + \mu(0,0,1)$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = \mu \\ x^2+y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$ il sistema non ha soluzioni; supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$x = \frac{5}{2\lambda}$, $y = -\frac{2}{2\lambda} = -\frac{1}{\lambda}$; quindi

$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{2}{2\lambda}\right)^2 = 1$; quindi

$29 = 4\lambda^2$; quindi $\lambda^2 = \frac{29}{4}$; quindi

$\lambda = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Per $\lambda = \frac{\sqrt{29}}{2}$, si ha $(x,y,z) = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right)$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, si ha $(x,y,z) = \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right)$

Si ha quindi

$E \cap F_4 \subset \left\{\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right)\right\}$

Sia $(x,y,z) \in F_5$. Sia $k: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \to (x^2+y^2-1, z+1)$

F_5 è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1

di equazione cartesiana $k(x,y,z) = (0,0)$

Se $(x,y,z) \in F_5$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \lambda \operatorname{grad} k_1(x,y,z) + \mu \operatorname{grad} k_2(x,y,z)$

cioè tali che

$(5,-2,3) = \lambda(2x, 2y, 0) + \mu(0,0,1)$.

Si ha quindi

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 3 = \mu \\ x^2+y^2 = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Se $\lambda = 0$, il sistema non ha soluzioni:
supponiamo $\lambda \neq 0$. Si ha

$$x = \frac{5}{2\lambda}, \quad y = -\frac{2}{2\lambda} = -\frac{1}{\lambda}$$; quindi

$$\left(\frac{5}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{2}{2\lambda}\right)^2 = 1$$; quindi, come sopra,

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

Per $\lambda = \frac{\sqrt{29}}{2}$, si ha $(x,y,z) = \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right)$

Per $\lambda = -\frac{\sqrt{29}}{2}$, si ha $(x,y,z) = \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right)$

Si ha quindi

$$E \cap F_3 \subset \left\{\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right)\right\}$$

Si ha quindi

$$E \subset \left\{\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right), \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right), \left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right)\right\}$$

Si ha

$$f\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right) = \frac{25}{\sqrt{29}} + \frac{4}{\sqrt{29}} + 3 = \sqrt{29} + 3$$

$$f\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, 1\right) = -\sqrt{29} + 3$$

$$f\left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right) = \sqrt{29} - 3$$

$$f\left(-\frac{5}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, -1\right) = -\sqrt{29} - 3$$

Si ha quindi $\max(f) = \sqrt{29} + 3$ e $\min(f) = -\sqrt{29} - 3$

Esercizio 9

L'equazione differenziale è un'equazione differenziale a variabili separabili, definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

Il problema di Cauchy assegnato è equivalente a

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \ y > 0$$

quindi a

$$\begin{cases} \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}\, y' = x \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \ y > 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni $y(x)$ tali che $0 \in dom(y)$,

$$\int_1^y \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \int_0^x t\, dt \quad , \ x \in \mathbb{R}, \ y > 0$$

cioè a

$$\frac{1}{2}\int_1^y (1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\, 2t\, dt = \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^x \quad , \ x \in \mathbb{R}, \ y > 0$$

cioè a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^y = \frac{1}{2}x^2, \quad x \in R,\ y > 0$$

cioè

$$\sqrt{1+y^2} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}x^2, \quad x \in R,\ y > 0$$

cioè

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}, \quad x \in R,\ y > 0$$

cioè

$$1 + y^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\right)^2, \quad x \in R,\ y > 0$$

cioè

$$y^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1, \quad x \in R,\ y > 0$$

cioè

$$y^2 = \frac{1}{4}x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1, \quad x > 0,\ y > 0$$

cioè

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}x^4+\sqrt{2}\,x^2+1} \quad , \quad x\in R,\ y>0,$$

cioè a

$$y = \sqrt{\frac{1}{4}x^4+\sqrt{2}\,x^2+1} \quad , \quad x\in R,\ y>0$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi: R \longrightarrow R,\quad x \longrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}x^4+\sqrt{2}\,x^2+1}$$

Esercizio 10

L'equazione differenziale è del secondo ordine di tipo normale definita su $R\times R\times R$

Poniamo $y'=z$

La funzione $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy assegnato se e solo se $z(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^2 \\ z(0)=1 \end{cases} \qquad x\in R,\ z\in R$$

e se $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = z \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale $z' = z^2$ ha per soluzione la funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to 0$$

Per l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = z^2 \\ z(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \ z \in \mathbb{R}$$

equivale a

$$\begin{cases} z' = z^2 \\ z(0) = 1 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \ z > 0$$

quindi a

$$\begin{cases} \frac{1}{z^2} z' = 1 \\ z(0) = 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \ z > 0$$

Tale problema di Cauchy è equivalente all'equazione implicita con soluzioni $z(x)$ tali $0 \in dom(z)$

$$\int_1^z \frac{1}{t^2} \, dt = \int_0^x dt, \quad x \in \mathbb{R}, \ z > 0$$

cioè

$$\left[-\frac{1}{t} \right]_1^z = \left[t \right]_0^x, \quad x \in \mathbb{R}, \ z > 0,$$

cioè

$$1 - \frac{1}{z} = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}, \quad z > 0$$

cioè

$$\frac{1}{z} = 1 - x \quad , \quad x \in \mathbb{R}, \quad z > 0$$

Si ha $1 - x > 0$; quindi $x < 1$

L'equazione è quindi equivalente a

$$\frac{1}{z} = 1 - x \quad , \quad x < 1; \quad z > 0$$

cioè a

$$z = \frac{1}{1-x} \quad , \quad x < 1, \quad z > 0$$

Si ha quindi

$$z : \,]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow \frac{1}{1-x}$$

Si ha quindi

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad , \quad x < 1, \quad y \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} \, dt = \Big[-\log(1-t) \Big]_0^x =$$

$$= -\log(1-x)$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\varphi : \,]-\infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow -\log(1-x)$$