Precorso di Matematica, aa 2012-2013, (IV)

Potenze, Esponenziali e Logaritmi

1. Nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che $1a = a$, per ogni $a \in \mathbb{R}$; per ogni numero $a \neq 0$, l'equazione $ax = 1$ ha una ed una sola soluzione, questa soluzione si dice *l'inverso di* a e si indica con a^{-1}. Ad esempio si ha
   $(-\frac{2}{3})^{-1} = -\frac{3}{2}$.

2. **Potenze con esponente intero relativo.**

   Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ e per ogni intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, la potenza di base a ed esponente n e' definita da

   $$a^n = \begin{cases} aa\cdots a \quad (n \textit{ volte}) & \textit{per } n > 0; \\ 1 & \textit{per } n = 0; \\ a^{-1}a^{-1}\cdots a^{-1} \quad (-n \textit{ volte}) & \textit{per } n < 0; \end{cases} ;$$

   le potenze con esponente negativo sono definite solo per $a \neq 0$.

   Ad esempio si ha:
   $(-\frac{2}{3})^{-2} = (-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.
   Le potenze ad esponente intero relativo hanno le seguenti proprieta':

   $$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}; \\ (a^m)^n &= a^{mn}; \\ (ab)^m &= a^m b^m. \end{aligned}$$

3. **Radici**

   - Consideriamo l'equazione

     $$x^2 = a$$

     nell'incognita x; per ogni $a \geq 0$ si prova che l'equazione ha due soluzioni reali, di segno opposto (eventualmente coinciedenti in 0);

la soluzione maggiore-uguale a 0 viene detta *radice quadrata di a* e viene indicata con

$$\sqrt{a};$$

per ogni $a < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali, e in tal caso $\sqrt{a}$ non e' definita.

- Consideriamo l'equazione

$$x^3 = a$$

nell'incognita x; per ogni $a \in \mathbb{R}$ si prova che l'equazione ha una ed una sola soluzione; questa soluzione viene detta *radice terza di a* e viene indicata con

$$\sqrt[3]{a}.$$

Si vengono cosi' a definire le radici

$$\sqrt[m]{a}$$

per ogni intero $m \geq 2$; per m pari $\sqrt[m]{a}$ e' definita solo per $a \geq 0$, e si ha $\sqrt[m]{a} \geq 0$; per m dispari $\sqrt[m]{a}$ e' definita per ogni $a \in \mathbb{R}$, e $\sqrt[m]{a}$ ha lo stesso segno di a. Conviene porre $\sqrt[1]{a} = a$, per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Per ogni intero positivo n, l'operazione "radice $n-$ma" e' l'inversa dell'operazione "potenza $n-$ma", nel senso che valgono le identita' seguenti

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \textit{per } n \textit{ dispari}; \\ \sqrt[n]{a^n} = |a| & \textit{per } n \textit{ pari}. \end{cases},$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Per semplicita', d'ora innanzi ci limiteremo a considerare radici di numeri maggiori-uguali a 0. Le operazioni di radice possiedono le seguenti proprieta'

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n;$$
$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$
$$\sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab},$$

per ogni $a, b \geq 0$. Osserviamo che

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a^{np}}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Queste proprieta' possono essere usate per effettuare delle semplificazioni:

$\sqrt[2]{32} = \sqrt[2]{4^2 2} = \sqrt[2]{4^2}\sqrt[2]{2} = 4\sqrt[2]{2},$

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4};$

oppure per effettuare dellle moltiplicazioni:

$\sqrt[6]{2}\ \sqrt[15]{3} = \sqrt[30]{2^5}\ \sqrt[30]{3^2} = \sqrt[30]{2^5 3^2} = \sqrt[30]{288}.$

4. **Potenze con esponente razionale.**

   Per ogni numero reale positivo $a > 0$ e per ogni numero razionale $\frac{m}{n}$, con m intero relativo ed n intero positivo, la potenza di base a ed esponente $\frac{m}{n}$ e' definita da

   $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

   Osserviamo che la definizione e' ben posta: se $\frac{mp}{np}$, con p intero positivo, e' una frazione equivalente a $\frac{m}{n}$, si ha

   $$a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

   Alcuni esempi:

   $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}; \qquad 2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{8}}.$

   Le proprieta' delle potenze continuano a valere per le potenze ad esponente razionale. Verifichiamo la prima proprieta':

   $$a^{\frac{m}{p}}\, a^{\frac{n}{q}} = \sqrt[p]{a^m}\sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq}}\ \sqrt[pq]{a^{np}} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{pq}} = a^{\frac{m}{p}+\frac{n}{q}}.$$

5. **Potenze con esponente reale.**

   Per ogni numero reale positivo $a > 0$ e per ogni numero reale r, si puo' definire la potenza a^r di base a ed esponente r.

   Non diamo la definizione, ma solo un'idea intuitiva su un esempio. La potenza 2^π si puo' ottenere considerando la successione $3,\ 3,1,\ 3,14,\ \ldots$

di decimali che approssimano π, ed usando la corrispondente successione di potenze ad esponente razionale $2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ \ldots$ per definire per approssimazione 2^π.

Si dimostra che

> *le proprieta' delle potenze continuano a valere per le potenze ad esponente reale.*

Sotto l'assunzione fatta $a > 0$ si ha

$a^r > 0 \qquad$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}$;

inoltre

$1^r = 1 \qquad$ *per ogni* $r \in \mathbb{R}$.

6. **Esponenziali**

Per ogni $b > 0$ fissato, consideriamo la funzione che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ la potenza b^x di base b ed esponente x; questa funzione si chiama *funzione esponenziale* di base b e si denota con $\exp_b$; cosi' si ha

$$\exp_b(x) = b^x.$$

Dalle proprieta' delle potenze segue che la funzione esponenziale trasforma somme in prodotti e trasforma prodotti in potenze

$$\exp_b(x+y) = \exp_b(x)\exp_b(y),$$
$$\exp_b(xy) = (\exp_b(x))^y.$$

Le basi piu' usate sono 10 e soprattutto il numero di Nepero e; questo numero e' irrazionale, le sua approssimazione alle prime 3 cifre decimali e' $e = 2,718$; la funzione esponenziale di base e viene indicata semplicemente con exp, cioe' si pone

$$\exp(x) = e^x.$$

7. **Logaritmi**

Fissato un numero reale b, con $b > 0$ e $b \neq 1$, consideriamo le equazioni

$$b^x = a$$

nell'incognita x; per ogni $a > 0$ si prova che l'equazione ha una ed una sola soluzione reale; questa soluzione viene detta *logaritmo in base* b *di* a, e viene indicata con $\log_b a$; per ogni $a < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali, e in questo caso $\log_b a$ non e' definito.

In altri termini, l'uguaglianza

$$\log_b a = c$$

significa che

$$b^c = a \qquad (b > 0, \quad b \neq 1, \quad a > 0).$$

Ad esempio, si ha

$$\log_2 \frac{1}{4} = -2, \quad \log_2 \frac{1}{2} = -1, \quad \log_2 \sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}, \quad \log_2 1 = 0,$$
$$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}, \quad \log_2 2 = 1, \quad \log_2 4 = 2.$$

Per ciascun b fissato, la funzione esponenziale di base b e la funzione logaritmo in base b sono una l'inversa dell'altra, nel senso che

$$\begin{aligned} b^{\log_b a} &= a, \qquad \textit{per ogni } a > 0; \\ \log_b (b^a) &= a, \qquad \textit{per ogni } a. \end{aligned}$$

Ciascuna funzione logaritmo trasforma prodotti in somme e potenze in prodotti

$$\begin{aligned} \log_b (a_1 a_2) &= \log_b a_1 + \log_b a_2, \\ \log_b (a^r) &= r \log_b a, \end{aligned}$$

per ogni $a_1, a_2, a > 0$, ed ogni $r \in \mathbb{R}$. Verifichiamo la prima proprieta'. Si ha che

$$b^{\log_b a_1} = a_1, \qquad b^{\log_b a_2} = a_2;$$

moltiplicando membro a membro, otteniamo

$$b^{\log_b a_1} b^{\log_b a_2} = a_1 a_2;$$

per le proprieta' delle potenze, si ha

$$b^{\log_b a_1 + \log_b a_2} = a_1 a_2;$$

da cio' segue che

$$\log_b (a_1 a_2) = \log_b a_1 + \log_b a_2.$$

Esempio.

$$\log_{10} 3.240 = \log_{10} \left(10^3 \cdot 3,240\right) = \log_{10} \left(10^3\right) + \log_{10} (3,240) = 3 + m,$$

dove m e' un numero reale, con $0 < m < 1$. In generale, se un numero a ha ordine di grandezza 10^k, con k intero relativo, allora il logaritmo in base 10 di a ha parte intera k.

I logaritmi erano lo strumento principale del calcolo numerico manuale. Venivano stilate tavole di valori della funzione esponenziale e della funzione logaritmo (solitamente in base 10, con una approssimazione a un certo decimale). Il calcolo dei prodotti veniva ricondotto al piu' semplice calcolo delle somme nel modo seguente. Per calcolare il prodotto $a = a_1 a_2$ di due numeri a_1 e a_2, si prendevano sulla tavola della funzione logaritmo i valori $l_1 = \log_{10} a_1$ e $l_2 = \log_{10} a_2$, poi si calcolava la somma $l = l_1 + l_2$, e infine si prendeva sulle tavola della funzione esponenziale il valore $10^l = a$.

La funzione logaritmo di base e viene detta *logaritmo naturale* e viene indicata semplicemente con $\ln$, cioe' si pone

$$\ln a = \log_e a.$$

Funzioni trigonometriche

1. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, consideriamo la circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, avente dunque lunghezza 2π ed equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Sia P un punto materiale che si muove nel tempo, e sia $P(t)$ il punto del piano in cui si trova P all'istante t; supponiamo che P si muova sulla circonferenza in senso antiorario con velocita' angolare costante, percorrendo un arco di lunghezza 1 in ogni unita' di tempo, e che P si trovi in $(1,0)$ all'istante $t=0$.

A partire da ogni istante, il punto P ritorna nella stessa posizione dopo 2π unita' di tempo; in simboli, si ha

$$P(t+2\pi)=P(t), \qquad \textit{per ogni } t\in\mathbb{R},$$

da cui segue che

$$P(t+2k\pi)=P(t), \qquad \textit{per ogni } t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Inoltre, 2π e' il piu' piccolo numero reale positivo per il quale vale questa proprieta'. Questo fatto si esprime dicendo che il moto di P e' *periodico* ed ha periodo 2π.

Si ha inoltre che $P(-t)$ e' simmetrico a $P(t)$ rispetto al primo asse del sistema di riferimento, per ogni $t\in\mathbb{R}$.

2. **Le funzioni Coseno e Seno**

Per ogni numero reale t,

- la prima coordinata del punto $P(t)$ si dice *coseno* di t, e viene indicata con $\cos t$;
- la seconda coordinata del punto $P(t)$ si dice *seno* di t, e viene indicata con $\sin t$.

In altri termini, si pone

$$P(t)=(\cos t,\sin t), \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Dal fatto che ciascun punto $P(t)$ appartenga alla circonferenza segue che

$$(\cos t)^2+(\sin t)^2=1, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Le funzioni coseno e seno sono periodiche di periodo 2π; in particolare si ha

$$\begin{aligned}\cos(t+2k\pi)&=\cos t, &\qquad &\textit{per ogni } t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z};\\ \sin(t+2k\pi)&=\sin t, &\qquad &\textit{per ogni } t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\cos(-t) = \cos t, \qquad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R};$$
$$\sin(-t) = -\sin t, \qquad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Dalla definizione si ricava immediatamente la seguente tabella di valori

t	$\cos t$	$\sin t$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1

Altri valori si possono ricavare da considerazioni di geometria elementare. Ad esempio per $t = \frac{\pi}{6}$ si ha che il triangolo di vertici l'origine O, $P(\frac{\pi}{6})$ e $P(-\frac{\pi}{6})$ ha tutti gli angoli uguali a $\frac{\pi}{3}$, e tutti i lati di lunghezza 1. Da cio' segue che

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

3. Consideriamo l'equazione

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le soluzioni x con $0 \le x < 2\pi$ sono $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = -\frac{\pi}{6}$. Poiche' la funzione coseno e' periodica di periodo 2π, le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ sono

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Consideriamo l'equazione

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Le soluzioni x con $0 \le x < 2\pi$ sono $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5}{6}\pi$. Poiche' la funzione seno e' periodica di periodo 2π, le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ si possono descrivere come

$$x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

4. **La funzione Tangente.**

   Per ogni $t \in \mathbb{R}$, consideriamo la retta passante per l'origine O e per il punto $P(t)$; la pendenza di questa retta viene detta *tangente* di t, e viene indicata con $\tan t$. Dunque la tangente di t e' definita per $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, e si ha

   $$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

   La funzione tangente e' periodica di periodo π, in particolare si ha

   $$\tan(t + k\pi) = \tan t, \qquad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

   Si ha inoltre

   $$\tan(-t) = -\tan t, \qquad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

   Esempio.

   $$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

5. Consideriamo l'equazione

   $$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

   Nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}$ c'e solo la soluzione $x = \frac{\pi}{6}$. Poiche' la funzione tangente e' periodica di periodo π, le soluzioni $x \in \mathbb{R}$ sono

   $$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$