PROVA SCRITTA DI MECCANICA RAZIONALE

15/06/2001

(C.d.L. in Ing. Civile-Edile)

Una corona circolare di raggio esterno $2R$ e di raggio interno R, con densità in un suo generico punto Q

$$\rho(Q) = \frac{2m}{15\pi R^4}|\mathrm{CQ}|^2,$$

(C indica il centro della corona) rotola senza strisciare sull'asse x di un sistema di riferimento cartesiano verticale Oxy. La corona è vincolata a non oltrepassare le rette parallele all'asse y passanti per A e per A$'$, con $|\mathrm{OA}| = 2R(\pi+1)$ e $|\mathrm{OA}'| = 2R(\pi/2+1)$. Un punto materiale P, di massa m, è vincolato a scorrere lungo il bordo interno della corona circolare (si veda la figura 1). Il sistema è soggetto, oltre che alla forza peso, ad una forza elastica $\mathbf{F_e} = K^2\mathrm{BB}'$ (B$'$ è la proiezione ortogonale di B sull'asse x) e a due coppie di momento $\mathbf{M_1} = 4K^2R^2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{M_2} = -2mgR\,\mathbf{k}$, applicate alla corona circolare.
Supposti i vincoli lisci ed introdotto il parametro adimensionale

$$\lambda = \frac{mg}{K^2R} \in \mathcal{R}^+,$$

determinare, utilizzando le coordinate lagrangiane ϑ e φ riportate in figura (si supponga che per $\varphi = 0$ B=O=C$'$):

1) le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine e la stabilità delle configurazioni di equilibrio ordinarie al variare del parametro λ;
2) la reazione vincolare esterna in C$'$ e quella interna in P nelle posizioni di equilibrio ordinarie; inoltre, sfruttando le equazioni cardinali della statica, ritrovare le configurazioni di equilibrio ordinarie;
3) l'energia cinetica e le equazioni del moto di Lagrange;
4) le equazioni delle piccole oscillazioni nell'intorno della posizione di equilibrio stabile;

- le matrici d'inerzia della corona circolare rispetto ai punti C e B, utilizzando i rispettivi sistemi di riferimento disegnati in figura 2.