La trasformata di Legendre

Marcello Seri

20 marzo 2008

La *Trasformata di Legendre* è un potente strumento matematico che permette di trasformare funzioni su uno spazio vettoriale in funzioni sul duale. Non è raro incontrare tali trasformate in fisica (soprattutto in relazione alla termodinamica), ma sono state applicate anche in geometria algebrica (hanno un legame con le dualità proiettive e le coordinate tangenziali) e in analisi (vengono usate per costruire i duali di spazi di Banach). Questa è una breve introduzione alla trasformata di Legendre, come descritta in [Arn89].

1 Definizione

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa, cioè $\nabla^2 f > 0$ dove ∇^2 rappresenta la matrice Hessiana.

Si definisce *Trasformata di Legendre* di f la funzione

$$\mathcal{L}(f)(f) = f^*(p) = \max_x (px - f(x)). \tag{1}$$

Dunque, se $x \in \mathbb{R}$ stiamo semplicemente misurando la distanza massimale tra la retta $y = px$ e la funzione $f(x)$ (v. Figura 1), in dimensione maggiore stiamo facendo la stessa cosa per ogni coordinata.

Si noti che il minimo si ottiene quando $\nabla_x(p \cdot x - f(x)) = 0$, o, allo stesso modo, quando $p = \nabla f(x)$: si sta, quindi, determinando x in funzione di p e non il viceversa. La condizione di convessità richiesta all'inizio garantisce l'esistenza di un solo punto di massimo e dunque la buona definizione della trasformata.

Esempio 1.1. Sia $f(x) = x^2$, allora $F(p, x) = px - x^2$ da cui $x(p) = \frac{p}{2}$ e $f^*(p) = \frac{p^2}{4}$.

Esempio 1.2. Sia $f(x) = \frac{mx^2}{2}$, allora $f^*(p) = \frac{p^2}{2m}$.

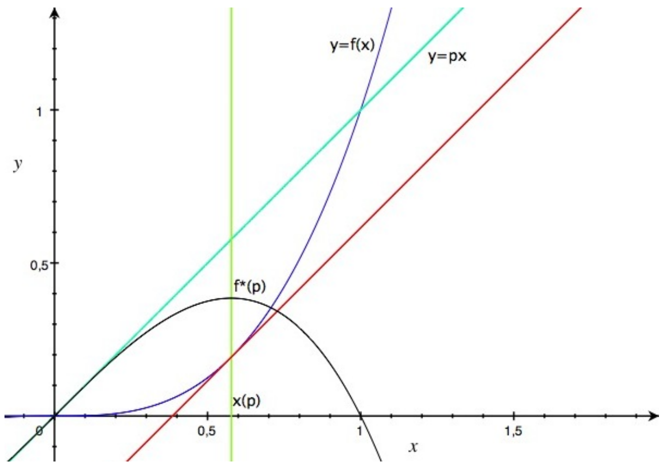

Figura 1: Costruzione della trasformata di Legendre per $f(x) = x^4$ ed un certo p fissato. Se $x(p)$ è l'ascissa del punto di distanza massima ed $F(p, x) = px - f(x)$, possiamo dire che $f^*(p) = F(p, x(p))$

Esempio 1.3. Sia $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$ con $\alpha > 1$ pari, allora $f^*(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$ con α e β coniugati tra loro $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1\right)$.

La Trasformata di Legendre è, in modo simile ad altre trasformate, un'involuzione. La dimostrazione richiede due lemmi preliminari.

Lemma 1.1. *$\nabla f^*(p) = x(p)$, dove $x(p)$ è la soluzione di $p = (\nabla f)(x)$.*

Dimostrazione. È noto che $f^*(p) = p \cdot x(p) - f(x(p))$, dove $x(p)$ è tale che $p = (\nabla f)(x(p))$. Quindi

$$\nabla f^*(p) = p \cdot (\nabla x)(p) + x(p) - (\nabla f)(x(p)) \cdot (\nabla x)(p) = x(p).$$

□

Lemma 1.2. *La trasformata di Legendre trasforma funzioni convesse in funzioni convesse.*

Dimostrazione. Per il Lemma 1.1, si ha

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f^*(p) &= \nabla(x(p)) \\
&= \nabla(x[(\nabla f)(x(p))]) \\
&= (\nabla x)(\nabla f)(x(p)) \cdot (\nabla^2 f)(x(p)) \cdot (\nabla x)(p) \\
&= (\nabla x)(p) \cdot (\nabla^2 f)(x(p)) \cdot (\nabla x)(p)
\end{aligned}$$

che è positiva quando $\nabla^2 f > 0$. □

Teorema 1.3. *La trasformata di Legendre è un'involuzione, cioè* $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f))(x) = f(x)$.

Dimostrazione. La dimostrazione che viene data in [Arn89] si basa sul ragionamento geometrico per cui, per definizione di trasformata di Legendre, la retta $y = xp - f^*(p)$ è la tangente di pendenza p alla curva $y = f(x)$. Poiché $f(x)$ è convessa, tutte le linee di tangenza sono *sotto* al grafico e, fissato $x = x_0$, il valore massimale di $x_0 p - f^*(p)$ come funzione di p è proprio $f(x_0)$. Il che implica che $\mathcal{L}(f^*)(x) = max_p(x_0 p - f^*(p)) = f(x_0)$.

Il calcolo può essere fatto algebricamente sfruttando il Lemma 1.2. Si ha che $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f))(x) = \mathcal{L}(f^*)(x)$ e

$$\mathcal{L}(f^*)(x) = x \cdot p(x) - f^*(p(x)),$$

dove $p(x)$ è definito da $x = (\nabla f^*)(p(x))$ in modo analogo a quanto fatto in precedenza. Ora, è anche vero che $f^*(p) = p \cdot y(p) - f(y(p))$, dove $y(p)$ è definito da $p = (\nabla f)(y(p))$. Quindi, per il Lemma 1.1, si ha $(\nabla f^*)(p) = y(p)$, con $y(p)$ come sopra. Ricapitolando, si è ottenuto che

$$x = (\nabla f^*)(p(x)) = y(p(x))$$

e che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^*)(x) &= x \cdot p(x) - f^*(p(x)) \\ &= y(p(x)) \cdot p(x) - [p(x) \cdot y(p(x)) - f(y(p(x)))] \\ &= f(x) \end{aligned}$$

in quanto il prodotto scalare euclideo $(\cdot)$ è simmetrico. □

2 Disuguaglianza di Young

Due funzioni f e g si dicono *duali nel senso di Young* se $g(p) = \mathcal{L}(f)(p)$, e, per il Teorema 1.3, $f(p) = \mathcal{L}(g)(p)$.

Teorema 2.1 (Disuguaglianza di Young)**.** *Se f e g sono funzioni convesse duali nel senso di Young, allora $p \cdot x \leq f(x) + g(p)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione,

$$g(p) = \mathcal{L}(f)(p) = max_x(p \cdot x - f(x)) \geq p \cdot x - f(x)$$

per ogni p ed x. Quindi

$$g(p) + f(x) \geq p \cdot x.$$

□

Questo risultato generale si può sfruttare per mostrare parecchie stime interessanti.

ESEMPIO 2.1. Se $f(x) = \frac{x^2}{2}$, dall'esempio 1.2 (con $m = 1$) si osserva che $f^*(p) = \frac{p^2}{2}$. Dunque $px \leq \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$.

3 Proprietà della Trasformata di Legendre

L'utilità della trasformata di Legendre deriva anche dalle innumerevoli proprietà di cui gode. La dimostrazione di ognuna si riduce al semplice calcolo per cui sarà omessa.

Se $a \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti proprietà.

3.1 Proprietà di scala

$$f(x) = a \cdot g(x) \Longrightarrow f^*(p) = a \cdot g^* \left(\frac{p}{a} \right) \tag{2}$$

$$f(x) = g(ax) \Longrightarrow f^*(p) = g^* \left(\frac{p}{a} \right) \tag{3}$$

Segue che se f è una funzione omogenea di grado α, la sua trasformata di Legendre è una funzione omogenea di grado β, dove α e β sono coniugati (vedi esempio 1.3).

3.2 Proprietà di traslazione

$$f(x) = g(x) + a \Longrightarrow f^*(p) = g^*(p) - a \tag{4}$$

$$f(x) = g(x + a) \Longrightarrow f^*(p) = g^*(p) - p \cdot b \tag{5}$$

3.3 Proprietà di inversione

$$f(x) = g^{-1}(x) \Longrightarrow f^*(p) = -p \cdot g^* \left(\frac{1}{p} \right) \tag{6}$$

3.4 Trasformazioni Lineari e Trasformate di Legendre

Infine, se $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare, per ogni funzione convessa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha

$$(Af)^* = f^* A^*, \tag{7}$$

dove A^* è l'aggiunto di A definito da

$$< Ax, y >=< x, A^* y > .$$

Riferimenti bibliografici

[Arn89] V. I. Arnold. *Mathematical Methods Of Classical Mechanics.* Springer, 1989.