Sui numeri

Marcello Seri

5 giugno 2008

"The numbers may be said to rule the whole world of quantity, and the rules of arithmetic may be regarded as the complete equipment of the mathematician."
James Clerck Maxwell

1 Problemi di rappresentazione

> *"... sebbene essi facciano anche uso delle forme visibili e vi ragionino intorno, non è ad esse a cui pensano, ma alle idee a cui assomigliano."*
> Platone

Fino a che punto gli incisori dell'osso di Babbuino di 37.000 anni fa trovato a Lelembo erano consapevoli della struttura numerica nascosta nelle loro 29 incisioni? E fino a che punto i Gumulgal australiani, una popolazione neolitica, si rendeva conto che il proprio modo di contare non era altro che l'odierna base binaria, cuore computazionale degli attuali computer?

L'atto del contare attraversa la storia dell'uomo sin dagli albori della civiltà. E questo non dovrebbe stupirci: accorgendosi di una certa ciclicità nei comportamenti atmosferici, iniziando ad allevare bestiame e coltivare piante e instaurando i primi rapporti commerciali, l'essere umano ha indubbiamente avuto la necessità di uno strumento per gestirli e controllarli. Conoscere i periodi in cui era necessario migrare altrove, i frutti disponibili, i periodi riproduttivi, ... era di vitale importanza.

Ma tra il cercare un modo per contare giorni e bestiame e pensare al numero come concetto più astratto di strada ce n'è tanta.

Aprendo il vocabolario si può leggere:

> *numero* s.m. entità matematica astratta usata per descrivere una quantità.

Ormai si da per scontato che il numero sia un simbolo che descrive una quantità, eppure la implicazioni filosofiche che stanno dietro questa affermazione sono molto pesanti. La traccia iniziale di questo piccolo saggio era decisamente diversa dalla attuale, a stravolgerla è stata la pubblicazione di [RM08]: nell'introduzione della rivista c'è un bellissimo discorso che passa per l'analisi della rappresentazione, in particolare di quella del numero, e si lega in maniera interessante al resto della relazione.

> [...] Però gli appassionati di matematica probabilmente si saranno interrogati talvolta sulla natura dei numeri, accorgendosi in breve che gli interrogativi dei filosofi acquistano rapidamente significato, se riconvertiti nell'indagine della quintessenza numerica. A voler fare i disfattisti, si potrebbero definire i matematici come coloro che si occupano di entità intangibili, infinite in diversi ordini di infinitezza, non chiaramente definite, di diversa natura e in ultima analisi inconoscibili[1]. Il numero sembra inizialmente solo

[1] *La matematica può essere definita la materia in cui noi non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando né se quello che stiamo dicendo è vero.* (Bertrand Russell)

una sorta di attributo, una proprietà di alcuni gruppi di oggetti (tre mucche, sette colline, dodici teste del mostro), ma poi assume identità indipendente: frazionaria, irrazionale, trascendente, complessa immaginaria, surreale. Sempre pronto ad andare all'infinito, e in infiniti di diverso ordine e grado, numerabili o non numerabili. Nessuna mucca ha *pi greco* zampe, ma *pi greco* come numero esiste, eccome. Ed esiste anche a prescindere dai cerchi disegnati sulla sabbia[2].

Purtroppo, la ricerca di cosa *non siano* i numeri aiuta poco nell'impresa maggiore, quella cioè di cercare di capire cosa siano. Anche se il numero 3 appare ben descritto dal suo carattere stampato in questa pagina, questo non significa che sia maneggevole e chiaro. Anche scrivendo più estesamente la parola *tre* arriviamo ad una facile descrizione del numero, e scegliere tra l'una e l'altra sembra essere solo questione di gusti. In realtà questo vale solo per chi parla italiano: a fior di matematici nati fuori dalla nostra penisola i segni grafici corrispondenti alla parola *tre* non dicono un accidenti. Se queste precisazioni possono sembrare solo ingenui sofismi, pensate allora al numero corrispondente ai segni grafici 1/3. Qui la cosa è già più complessa, perché il numero descritto è meno familiare. Innanzitutto, quei tre caratteri rappresentano un numero o una formula? Dicono o non dicono la stessa identica cosa di un terzo e di $0,33333...$?

Siamo in genere abituati a trattare i numeri e le loro *rappresentazioni* senza soffermarci troppo sulle implicazioni (e sulle limitazioni) che queste comportano. Possiamo convenire che la frase *"un terzo"* altro non sia che la denominazione, in lingua italiana, dell'espressione 1/3. Ma quest'ultima è un numero o no? Uno studente delle medie (e probabilmente anche dei primi anni delle superiori) tende di solito a "risolvere" ulteriormente l'espressione, perché la presenza del simbolo di divisione suggerisce la presenza di un'operazione, e quindi la necessità di operare ancora, appunto; e si sentirà in genere più soddisfatto se potrà pestare i tasti sulla calcolatrice e scrivere infine il numero in forma decimale. Del

[2]Pensare a *pi greco* come numero indissolubilmente legato al rapporto tra circonferenza e diametro del cerchio è un po' come pensare a 4 come indissolubilmente legato alle zampe delle mucche. Nessuno può negare che *pi greco* sia il rapporto tra circonferenza e diametro del cerchio, ma è ben lungi dall'essere *solo* quello. Anche perché altrimenti - a voler essere obiettivi - definire come *rapporto* (ratio) quello che è il numero *irrazionale* per eccellenza (a pari merito con radice di 2), sarebbe una bella contraddizione.

resto, i classici esercizi nei quali occorre risolvere lunghe espressioni algebriche altro non sono che successive semplificazioni di oggetti che comunque rimangono sempre uguali a sé stessi, dal punto di vista *ontologico*. Scrivere $6x7 + 8$ è esattamente la stessa cosa che scrivere 50, abitudine e maneggevolezza a parte, nel senso che entrambe le grafie rimandano al medesimo oggetto. Ciò non di meno, se è davvero la maneggevolezza a contare, allora è quantomeno comprensibile che $1/3$ sia preferibile a $0,3...$, vista la scarsa maneggevolezza che in questo caso ha la rappresentazione decimale: anche perché bisogna ricordare che i puntini di sospensione fanno parte integrante del numero in questione, ma non è mai molto chiaro come applicare le normali regole di calcolo (addizione, moltiplicazione, divisione) ai quei puntini sfuggenti.

Il punto è che i numeri sono cose diverse dalle loro rappresentazioni, anche se noi siamo abituati ad usare quasi esclusivamente quest'ultime. In una certa misura, *tre mucche*, la parola *tre*, il simbolo 3, l'espressione $9^{1/2}$ o un disegno come questo $///$ rincorrono sempre lo stesso concetto, per raggiungerlo sempre soltanto in parte; questa limitazione è propria del "*rappresentare* senza *essere*", e in questo senso i numeri sono splendidi soggetti per gli estimatori della filosofia di Schopenhauer[3].

È solo la familiarità a far preferire una forma di rappresentazione numerica piuttosto che un'altra? Probabilmente ci sono molti altri fattori che contano: la maneggevolezza, la praticità, l'uso. Se ci abituiamo a scrivere 87 invece che $LXXXVII$, guadagneremo in velocità nei calcoli. Se abbiamo a che fare con grandi quantità misurate in piccole unità di misura, un po' di esercizio con la notazione esponenziale ci farà un gran bene. Ma dovrebbe rimanere sempre ben chiaro che il simbolo d'una cosa non è mai la cosa in sé. Forse è per questo che sono stati proprio i matematici i primi a cercare di svincolarsi dal calcolo numerico, concentrandosi soprattutto sulle proprietà: mentre i fisici e gli ingegneri devono sempre stare attenti in modo particolare al danzare delle cifre nei loro strumenti. È vero che in questo caso specifico i numeri non sono più quelle entità sfuggenti che sono inseguite con difficoltà dalle definizioni filosofiche, quanto piuttosto onesti registratori di misure, che sono una cosa ben diversa; ma ci sono stati momenti, nella storia, in cui i trionfi della matematica e della fisica, allea-

[3] Si legga a tal proposito "Il Mondo come Volontà e Rappresentazione" di Arthur Shopenauer (N.d.A.)

> te e invincibili, sembravano promettere una comprensione totale, assoluta e matematica di ogni aspetto della natura, e in quei momenti numero e misura rischiavano di confondersi. Era un periodo d'esaltazione sublime, per gli scienziati, e la paura maggiore che molti di essi paventavano era proprio la fine della ricerca, l'esaurirsi dei misteri. Una volta tolto ogni mistero al mondo, tramite la scienza ovunque trionfante, cosa altro era possibile fare, per uno scienziato? [...]

Si dà il caso che uno dei grandi problemi che la matematica antica ha dovuto affrontare è stato dover raccordare le unità di misura per poter gestire gli scambi commerciali e il cambio tra i sistemi monetari.

Può sembrare un problema banale, ma c'è da considerare che nell'antichità ogni popolazione aveva il suo modo di rappresentare i numeri ed usarli. Il problema, più che notazionale, era legato al cambio di base tra i vari sistemi numerici. Ed i popoli più esperti in questo campo erano i più attivi economicamente o quelli che usavano più sistemi numerici e notazioni legate a basi differenti.

L'attuale notazione posizionale, in cui il valore dei simboli dipende esplicitamente dalla posizione che hanno nella propria espressione scritta, non era diffusa e, come se non bastasse, le basi numeriche erano le più disparate. Capeggiavano tra tutte base binaria, base 10 e base 20, e, non a caso, accadeva di frequente che il numero 10 e il numero 5 si pronunciassero come le parole *mani* e *mano* rispettivamente. Questo perché il modo più immediato di contare è usare le mani e le dita. Le uniche popolazioni ad usare la base sessagesimale (60) erano i Babilonesi e gli antichi Maya, che sfruttavano anche la base 13, essenziale per gestire il loro calendario (che è tuttora uno dei più precisi mai pensati). Se a questo si aggiunge che alcuni usavano basi diverse per frazioni e numeri interi[4] si capisce quanto poteva essere complicata la comunicazione tra le diverse popolazioni (almeno per quanto riguarda la matematica). Anche in virtù di questo fatto, si può immaginare come mai i reperti più frequenti dopo le contabilità sono abbecedari e tavole di cambio.

Probabilmente è stato anche grazie all'osservazione che i numeri erano sempre la stessa cosa, indipendentemente dal come venissero rappresentati, se il dubbio che ci sia qualcosa di più di uno sterile simbolo ha cominciato a farsi strada tra gli antichi pensatori dopo che le popolazioni di diverse regioni del mondo sono entrate in contatto.

[4] Gli antichi romani usavano la base 10 per i numeri interi e la base 12 per le frazioni proprie.

2 Cenni storici

"I numeri regnano sull'universo."
Pitagora

Uno studio dell'evoluzione del numero, richiede che almeno inizialmente si proceda in parallelo in quanto le popolazioni delle americhe, quelle europee, quelle nord-africane ed eur-asiatiche e quelle indocinesi si sono evolute in modo abbastanza indipendente.

Gli storici, normalmente, fanno risalire le origini del numero al 2000 a.C., come testimoniato dalla *tavoletta Plimpton 322* babilonese, probabilmente il primo "sussidiario di matematica" della storia, e dalle tavole numeriche, elenchi di numeri utilizzati per calcoli astronomici e di agrimensura risalenti al X secolo a.C..

Tuttavia nelle culture dell'antica Mesopotamia esistevano tabelle per le addizioni e le sottrazioni già durante il regno di Sargon I, intorno al 2350 a.C..

I documenti dell'Antico Egitto più significativi sono il *papiro di Ahmes* o *Ahmose*, dal nome dello scriba che lo compose nel 1650 a.C. circa, e il *papiro di Mosca*, risalente al 1850 a.C. circa. In totale questi papiri presentano 112 problemi con le relative soluzioni (di cui purtroppo mancano le dimostrazioni). Per pignoleria, Ahmes dice che il suo materiale è tratto da un documento anteriore, e fa risalire l'originale ad Imhotep, medico e architetto del faraone Djoser della III dinastia, e quindi al 2650 a.C. circa.

L'uso di concetti numerici avanzati, è documentato anche nel *Sulvasutra* indiano, di datazione incerta ma comunque anteriore al VI secolo a.C.. Alcuni particolari comuni tra il *Sulvasutra* e gli *Elementi di Euclide* fanno pensare ad una derivazione diretta o ad un comune retaggio. Ad esempio entrambi utilizzano la media geometrica per la quadratura del rettangolo, ossia la costruzione di un quadrato di area equivalente a quella di un rettangolo dato e questo metodo non è né il più semplice né il più istintivo.

In Grecia, da subito il numero ha avuto un posto centrale nella filosofia: dall'*Uno* di Parmenide e Filolao ai numeri triangolari, pentagonali, piani e solidi dei Pitagorici, passando per la concezione platonica del numero come oggetto concreto del mondo delle idee.

Uno scoglio insolubile nella visione della matematica antica, prettamente basata sugli interi, fu la dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale di un quadrato e del suo lato.

Nel frattempo, anche l'oriente poteva già vantarsi di una cultura numerica molto profonda. La più antica testimonianza della matematica cinese risale al periodo degli Stati Combattenti. Si tratta di un manoscritto, il *Chou Pei*

Suan Ching o Zhoubi suanjing (Il libro classico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo). Oltre ad essere un testo di astronomia, introduce il teorema di Pitagora e alcune regole per le operazioni con le frazioni. La sua datazione è incerta, ma si ritiene possa essere stato scritto tra il VI e il III secolo a.C., e forse è basato su materiale precedente ignoto. Nel 1984, in tre tombe della dinastia Han vicino Jiangling, nella provincia di Hubei, vennero portate alla luce numerose strisce di bambù, che costituivano una raccolta di argomenti matematici: su una di esse vi era l'intestazione *Suan Shu Shu* (Un libro sull'aritmetica). Vengono datate intorno all'inizio del III secolo AC, e probabilmente sono dunque contemporanee al Chou Pei. Favoriti dal vantaggio di un sistema posizionale, dell'uso dello zero e dei negativi, in pochi secoli i matematici cinesi arrivarono ad avere conoscenze matematiche che l'occidente avrebbe visto solo molto più tardi: ad esempio, già nell'XI secolo il matematico Chia Hsien aveva sviluppato il triangolo di Pascal per l'espansione della potenza n-esima del binomio $(a+b)$ in forma esplicita. Inoltre, sia William Horner che Paolo Ruffini conoscevano, e potrebbero avervi basato i loro metodi, la soluzione cinese per trovare le radici delle equazioni di grado qualunque.

I metodi cinesi di calcolo arrivarono fino in Giappone, dove nel XVII secolo Seki Kowa, vero genio fuori dal tempo, introdusse sia una forma di calcolo detto *yenri* del tutto equivalente a quelli moderni basati su derivate ed integrali che utilizzò per calcolare il volume della sfera, sia il concetto di determinante, nel suo trattato *Kai Fukadai No Ho* del 1683.

Anche i Maya avevano raggiunto un altro grado di rappresentazione dei numeri grazie al quale potevano cimentarsi nelle scienze matematiche e nell'astronomia con risultati a volte sconcertanti. A loro viene attribuita anche la scoperta dello zero, molto prima di quando accadde in India.

Nonostante tutto questo, la struttura dei numeri, legata ai cosiddetti numeri primi, è ancora oggi un mistero. Per una prima assiomatizzazione si è dovuta attendere la fine del XIX secolo, quando negli *Aritmetica Principia* il matematico italiano Giuseppe Peano scrisse i cinque postulati che ancora portano il suo nome. A tal proposito, Leopold Kronecker si sentì di dire

Dio ci ha dato i numeri naturali, il resto è opera dell'uomo.

Nel frattempo la matematica ha fatto altri passi avanti e, se si considera l'attuale costruzione dei numeri, l'affermazione andrebbe corretta in "*Dio ci ha dato l'insieme vuoto, l'assioma dell'infinito e l'assioma dell'estensione, il resto è opera dell'uomo*", molto meno poetica ma è innegabile che bastano questi tre assiomi per ricostruire l'insieme dei numeri naturali e con pochi altri si può estendere questo insieme fino ad arrivare ai complessi [Ser07] e ad i quaternioni. L'insieme di assiomi considerati ad oggi nella fondazione della matematica è stato sviluppato da Zermelo nel 1908 e completato da Fraenkel nel 1922. Oltre agli assiomi contenuti in questa formulazione, per proseguire negli sviluppi della matematica moderna, si dovrebbe scegliere di includere anche l'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo.

3 Cronologia dei sistemi numerici

"Succede invece che l'infinito sia il contrario di ciò che dicono,
perché non è ciò fuori del quale non c'è nulla,
ma ciò fuori del quale c'è sempre qualcosa."
Aristotele

Per quanto sia improbabile riuscire a scoprire chi per la prima volta ha pensato al numero come ente astratto riferito all'"idea a cui assomiglia", è possibile risalire ad una cronologia dell'utilizzo dei sistemi numerici scoprendo un'evoluzione per certi versi inaspettata. L'evoluzione cronologica è, generalmente, la seguente:

1. interi positivi;
2. razionali positivi;
3. irrazionali positivi algebrici;
4. 0;
5. numeri negativi;
6. campo complesso;
7. quaternioni, ottonioni e successive generalizzazioni. Pressappoco negli stessi anni vengono definiti i numeri iperreali e superreali.

Questo sviluppo dipende non solo dalle notazioni usate dai vari popoli, ma in qualche modo si lega alla visione filosofica del mondo e del numero che via via si va a definire tra le varie popolazioni. Ma cerchiamo di procedere con ordine.

Se non resta difficile accettare che le prime testimonianze scritte legate alla matematica presentino soltanto numeri interi positivi, resta difficile capire perché fino a pochissimi secoli fa i numeri negativi siano stati additati come assurdi o maligni e non accettabili più o meno da tutte le culture conosciute.

Essendo, i sistemi numerici, un mezzo per tenere d'occhio il calendario e le greggi (almeno inizialmente) si concepisce che il numero intero positivo rappresenti la prima classe di numeri utile; d'altra parte, con l'inizio dei primi commerci e del baratto la scoperta delle frazioni diventa quasi una necessità, soprattutto per riuscire a raccordare le differenti unità di scambio. È questo, assieme al bisogno di conoscere le dimensioni delle nascenti "proprietà private", che sfocia nella necessità di definire un'aritmetica dei numeri. Aritmetica che ha come conseguenza la necessità di rendere i simboli che definiscono i numeri ciclici (ed in numero legato alla base del sistema numerico utilizzato) e porta con sé (anche se non sempre, si pensi all'antica roma) l'introduzione della notazione posizionale. Essendo fenici e babilonesi i più importanti commercianti tra le antiche popolazioni, non deve stupire che la loro fosse la più sviluppata aritmetica del passato assieme a quella Maya.

Tuttavia è proprio con l'avvento dei commerci che nasce il concetto di debito, che per un lettore dei nostri tempi è evidentemente rappresentabile con un numero negativo. Sembra quindi un controsenso che non ci siano tracce dei numeri negativi in nessuno degli scritti Egiziani, Babilonesi, Indiani e Greci trovati fino ad oggi. I primi ad avere l'idea, probabilmente, sono stati i cinesi che già dal II secolo a.C. li identificavano con colori diversi (il rosso per i positivi ed il blu per i negativi). In occidente fanno la prima comparsa nell'*Arithmetica* di Diofanto attorno al 275 d.C. e precisamente si afferma che c'è una soluzione che rende vera l'equazione $4x + 20 = 4$ ma è *assurda*.

Successivamente sono gli Indiani a considerarli, associando ai numeri positivi l'idea di possesso e a quelli negativi l'idea di debito. In breve tempo riescono anche a superare i progressi di Diofanto e dimostrano che una quadrica ha sempre due radici, ma è con fatica che si accetta che una di esse possa essere negativa. Infatti, Bhaskara nel XII sec. d.C. scrive che "l'equazione $x^2 - 45x = 250$ ha come radici $x = 50$ ed $x = -5$ ma il secondo valore non deve essere considerato in quanto è inadeguato. Le persone non approvano le radici negative". In altre parole le radici negative sì, ci sono, ma non sono accettabili.

In europa furono introdotti da Fibonacci nel XIII secolo assieme all'attuale notazione indo-arabica e allo 0. Nel *Liber Abaci* è presente la nozione di numero negativo associata all'idea di debito, proprio come nella cultura da cui li ha importati, tuttavia ancora nel 1545, Cardano, nella sua *Ars Magna*, ottenendo per un'equazione radici negative, le chiama *fittizie* mentre chiama *reali* quelle positive. In realtà, fino al XIV secolo, nonostante sia ormai chiaro che i numeri negativi esistono al pari di quelli positivi, non si verifica una loro accettazione.

Anche lo 0 fa fatica ad arrivare in occidente. Due sono i suoi padri: i Maya e gli Indiani. Mentre per quanto riguarda i primi si hanno pochi reperti, per i secondi qualche informazione più precisa è stata trovata. Si pensa che lo 0 e la notazione indo-arabica posizionale in base dieci[5] appaiano più o meno nel periodo di Aryabhatta, nato nel 476 d.C.. Di certo c'è che la notazione fino al III secolo d.C. non presentava lo zero, dopo Aryabhatta lo presenta.

Più chiara è l'origine della forma dello 0: gli indiani facevano i loro calcoli su un abaco embrionale composto da una tavoletta d'argilla e dei sassolini colorati, togliendo i sassolini (e quindi sottraendo) restavano dei buchi vuoti... dal buco vuoto all'ovale che indica lo zero la strada è poca.

Strano a dirsi, i numeri irrazionali e l'incommensurabilità tra le misure sono molto più antichi dello 0 e dei numeri negativi. Sembra sia stato Eudemo, un allievo di Pitagora e brillante membro della scuola pitagorica, a scoprirli e proprio a causa del teorema che porta il suo nome. Allo stato attuale delle cose, si pensa che all'origine di tutto ci sia stato il seguente problema:

> Data la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo isoscele, trovare la lunghezza dell'ipotenusa.

Per i pitagorici il mondo era retto dall'armonia e dalla perfezione dei numeri interi, e tali numeri e i loro rapporti scaturivano dalla geometria che è l'idea che dà la forma alle cose. I numeri erano essenzialmente delle entità geometriche elevate a divinità. Quando Eudemo scoprì che le lunghezze in gioco nel problema considerato erano incommensurabili probabilmente fu una tragedia all'interno della scuola Pitagorica: negli irrazionali vedevano un oscuro mistero, un simbolo dell'inspiegabile. E questa paura era così grande che il primo che portò la scoperta fuori dalle mura della scuola ne pagò le conseguenze con la vita. La geometria degli interi e dei rapporti, a quel punto, era diventata insufficiente e sarebbe servito uno studio molto più aritmetico e analitico per portare avanti la questione. Dopo i pochi sviluppi di Euclide, bisognò aspettare il XV sec. prima di vedere novità.

La storia dei complessi è molto meno complicata, la loro introduzione richiedeva uno sviluppo dell'aritmetica e dell'algebra tale che sarebbe stato difficile pensarli nell'antichità. Il primo a farne cenno fu Cardano nella già citata *Ars Magna*. Dimostrò che le radici complesse di un'equazione polinomiale appaiono in coppia, ma non riuscì a spiegarsi cosa fossero quelle quantità "sofistiche", che descrisse come "ingegnose ma inutili". Nulla di più sbagliato, visto che con Riemann e Cauchy i numeri complessi hanno permesso di rivitalizzare la matematica che, all'epoca, stava cominciando a stagnare ed hanno aperto una miriade di nuove strade ed idee.

[5] L'attuale notazione numerica per intenderci.

4 La “nuova” matematica

“Una goccia che si spande nell’acqua, le fluttuazioni delle popolazioni animali, la linea frastagliata di una costa, I ritmi della fibrillazione cardiaca, l’evoluzione delle condizioni meteorologiche, la forma delle nubi, la grande macchia rossa di Giove, gli errori dei computer, le oscillazioni dei prezzi, ... Sono fenomeni apparentemente assai diversi, che possono suscitare la curiosità di un bambino o impegnare per anni uno studioso, con un solo tratto in comune: per la scienza tradizionale, appartengono al regno dell’informe, dell’imprevedibile, dell’irregolare. In una parola al caos. Ma da due decenni, scienziati di diverse discipline stanno scoprendo che dietro il caos c’è in realtà un ordine nascosto, che dà origine a fenomeni estremamente complessi a partire da regole molto semplici.”

James Gleick

Una costruzione esauriente di tutte le strutture numeriche oggi conosciute richiederebbe più che un intero libro. Tuttavia è interessante capirne le conseguenze algebriche e vedere i motivi che spingono oggi i matematici a studiarle. Il discorso non è banale come sembra... Quante persone sanno che gli interi si definiscono come particolari strutture sui numeri naturali e quante credono che i naturali siano un sottoinsieme degli interi ad esempio? Rispettivamente poche e la gran parte, eppure gli interi sono definiti tramite classi di coppie di naturali; si può pensare ai naturali come un sottoinsieme degli interi solo perché è possibile definire un isomorfismo (applicazione biiettiva che mantiene le operazioni) che lega un sottoinsieme degli interi ai naturali. Lo stesso ragionamento vale per ogni estensione successiva: interi nei razionali, razionali nei reali, reali nei complessi o nei surreali. Quando sono state formalizzate tali estensioni, anche per garantire che l’immersione fosse ben definita, ci si aspettavano dei risultati positivi, ma non potevano certamente essere dati per scontati.

Andiamo dunque a guardare agli insiemi numerici così “come si fa oggi a scuola”. Si introducono i numeri naturali, spesso includendo lo 0 come già fatto da Peano, e si definiscono le quattro operazioni di base. Non sempre si mostrano i problemi che sorgono del fatto che i numeri sono infiniti... Galileo considerò mostruoso il fatto che i numeri pari, i numeri dispari, le potenze di un qualunque intero, i numeri primi e i numeri interi fossero lo stesso numero. Sottoinsiemi che spesso e volentieri sembrano molto più piccoli dell’insieme totale in realtà sono grandi come il totale... è il paradosso dell’albergo infinito di Hilbert! I numeri naturali che sembrano così chiari ed evidenti hanno già, dentro la loro stessa struttura, una delle costruzioni più pericolose e tremende che si possano immaginare: l’infinito. Per molti può sembrare assurdo, personalmente considero l'infinito e i suoi "paradossi" una delle espressioni più belle e alte della matematica. Eppure è così strano, così controintuitivo per chi non è abituato a vederlo, così lontano e misterioso. Ancora non è chiaro chi si sia posto per primo il problema dell'infinito. Archimede cercando di dare un nome al numero di granelli di sabbia che compongono l'universo si è certamente reso conto che sarebbe bastato moltiplicare quel numero per se stesso per ottenere un numero immensamente più grande (e così via). I matematici indiani, abilissimi calcolatori, cercavano metodi per trattare numeri sempre più grandi scoprendo le regole aritmetiche della cosiddetta matematica vedica, eppure quei numeri erano briciole in confronto all'immensità degli infiniti numeri che gli succedono.

Questi problemi non sono solo elucubrazioni filosofiche, sono il cuore stesso dell'aritmetica e dei numeri naturali, oserei dire della matematica stessa. Cos'è che differenzia la matematica e le altre scienze? Cosa rende la matematica la regina delle scienze? Non può essere solo il metodo, deve esserci qualcosa di più del semplice ragionamento logico. La matematica è quello che è perché ha il *Principio di Induzione*, ovvero il principio che afferma che nell'insieme dei numeri naturali, se una proprietà è vera per un valore iniziale n_0 e se assumendola vera per un qualunque valore n essa vale anche per il suo successore $n+1$, allora la proprietà è vera per tutti i naturali a partire da n_0. Questo è un ragionamento che manda un procedimento finito all'infinito e, oltre che non banale e non evidente, racchiude anche il senso dei numeri naturali e delle infinità numerabili (ossia grandi come l'insieme dei numeri naturali). Ma facciamo una pausa ed andiamo avanti.

Studiando le operazioni di base sui numeri naturali ci si accorge che mentre somma e prodotto sono ben definite, la sottrazione e il quoziente hanno qualche problema. Ci si chiede, quindi, se si possono aggiungere degli altri numeri in modo che almeno la sottrazione sia ben definita, così facendo ci si inventa un modo per andare al di là dello zero che non è altro se non l'introduzione degli interi negativi. E qui sorge un nuovo problema con l'infinito: dopo aver visto che è possibile considerare i numeri naturali come un particolare sottoinsieme degli interi, si può anche mostrare che gli interi (che sono infiniti "a destra" e "a sinistra") sono tanti quanti i numeri naturali (che sono infiniti "da una parte sola").

Come se non bastasse, cercando di includere anche i quozienti (esclusa la divisione per 0), e dunque passando ai cosiddetti razionali[6], la situazione non cambia. Si introducono un'infinità di nuovi elementi: tra due numeri interi consecutivi qualunque esistono un numero infinito di frazioni e nessun altro

[6] I razionali sono classi di coppie di interi e, dunque, classi di coppie di classi di coppie di naturali.

numero intero eppure, come ha dimostrato Cantor, i numeri razionali sono tanti quanti gli interi che sono tanti quanti i naturali.

A questo punto si può pensare che in realtà esiste un solo infinito e dunque tutti gli insiemi infiniti "sono della stessa grandezza". Attenzione però, ancora non abbiamo considerato gli irrazionali.

Gli irrazionali sono un risultato naturale di necessità geometriche. Basta calcolare la diagonale di un quadrato, l'area di un cerchio o la lunghezza del lato di un cubo di volume doppio di un altro cubo dato per incappare in tali numeri. Possono essere divisi in due classi: gli algebrici e i trascendenti. Sono algebrici quelli che possono essere definiti come soluzione di un'equazione polinomiale, trascendenti gli altri[7].

Già la definizione dei numeri reali è un problema. Esistono due strade per farlo e sono entrambe molto complesse e profonde: la strada di Dedekind che considera l'elemento separatore di coppie di classi contigue di numeri razionali (il cosiddetto completamento per tagli) e quella di Cantor che sfrutta opportune successioni di numeri razionali. Bene, definiti i reali, si può dimostrare che non possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali. I reali sono "più infiniti" dei naturali, sono tanti quanti gli elementi dell'insieme delle parti dei numeri naturali. Ora, poiché l'insieme delle parti di un insieme finito di N elementi è 2^N, chiamata $\aleph_0$ la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali, la cardinalità dell'insieme dei numeri reali è $2^{\aleph_0}$. La cosa più sorprendente è che considerando l'insieme delle parti dei reali si ottiene un insieme ancora "più infinito", un insieme di cardinalità $2^{2^{\aleph_0}}$.

Un problema importante, a questo punto, è se si può definire un insieme di numeri di cardinalità compresa tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ ad esempio. A questa domanda[8] è stata data una risposta e, cioè, dipende! Non è possibile dimostrare che si può né che non si può, per cui o si prende come assioma il fatto che sia possibile o si prende come assioma il suo contrario.

A questo punto si giunge ad un bivio. Infatti i numeri reali possono essere ulteriormente estesi in due modi, per ovviare a problemi diversi.

Il primo modo, ormai superato, deriva dall'analisi non standard. Una cinquantina di anni fa si è tentato di semplificare l'analisi e facilitare i lavori con infiniti (numeri grandi come l'infinito stesso) e gli infinitesimi (numeri così piccoli che è difficile distinguerli dallo zero) definendo i cosiddetti numeri iperreali. L'insieme dei numeri iperreali e dei reali è il cosiddetto insieme dei numeri surreali: questo viene definito tramite completamento per tagli dopo

[7] In genere dimostrare l'irrazionalità di un numero e la sua trascendenza non è una cosa facile.

[8] Per saperne di più su questo problema basta cercare "ipotesi del continuo".

aver definito sui numeri reali estesi con ∞ una aritmetica degli infiniti. È possibile ridefinire tutte le operazioni in modo che lavorare con infiniti ed infinitesimi non solo ha senso ma non è più difficile che lavorare con i numeri reali. La teoria è stata sviluppata poco in quanto gli avanzamenti successivi dell'analisi standard l'hanno resa più flessibile e maneggevole, ovviando alle difficoltà che avevano portato alla definizione dei surreali: resta comunque un interessante esempio dell'imprevedibilità e della potenza della matematica e di come l'infinito possa essere "ridotto" ad essere un numero.

L'altro modo, più vecchio e famoso, è definire l'insieme dei numeri complessi. Già Cardano si era reso conto che, supponendo che $\sqrt{-1}$ avesse un senso, si sarebbero potute risolvere molte equazioni polinomiali, ma non era andato troppo oltre. Per capire l'utilità dei numeri complessi non basta guardare ad equazioni della forma $x^2 + 1 = 0$, perché danno il meglio di sé sull'analisi funzionale e sulla fisica, in tali campi la loro influenza è così profonda che non è possibile fare a meno dell'analisi complessa per il loro studio. I fenomeni elettromagnetici e la meccanica quantistica, ad esempio, sono possibili principalmente grazie all'introduzione dell'unità immaginaria i (quel numero tale che $i^2 = -1$) e del campo complesso. Dare un senso ai numeri complessi come estensione dei reali non è un fatto banale ma non è più difficile che darla agli interi come estensione dei naturali.

L'insieme dei numeri complessi è uno dei più "strambi". I numeri possono essere rappresentati in tre modi diversi (anche di più a dire il vero). C'è una notazione algebrica $x+iy$, una trigonometrica $\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ e una esponenziale $\rho e^{i\theta}$, ognuna con i suoi pregi e i suoi difetti. Le funzioni reali estese al campo complesso acquistano comportamenti particolari, periodicità, strani domini di definizione, e tutto lo spazio sembra comportarsi diversamente. Inoltre, inaspettatamente, sono legati al cuore della struttura dei numeri naturali tramite la *congettura di Riemann* che lega la distribuzione dei numeri primi agli zeri non banali di una particolare funzione complessa: la *Zeta di Riemann*.

Purtroppo per approfondire il discorso si dovrebbe scrivere un libro apposito, ma è doveroso dire che il campo complesso può essere ulteriormente esteso nei cosiddetti quaternioni, e i cosiddetti quaternioni negli ottonioni e così via, definendo una sorta di ulteriori unità immaginarie non commutative e le loro mutue relazioni.

Continuando a salire di completamento in completamento, per tante proprietà che si acquistano altrettante se ne perdono. Così i quaternioni non sono commutativi, gli ottonioni non sono associativi e le strutture che stanno oltre sono qualcosa di difficilmente descrivibile in un saggio come questo.

Ma gli insiemi numerici non finiscono qui. Torniamo indietro agli interi, lavorandoci un po' si scopre che, definendo opportune relazioni di equivalenza, si possono trasformare in oggetti finiti, ciclici e dalle interessanti proprietà algebriche. Oppure si può cercare un modo per prolungare i numeri reali infinitamente anche alla sinistra del punto decimale definendo i numeri $p - adici$.

Le costruzioni ideate negli ultimi due sono le più bizzarre e disparate e, probabilmente, sono innumerevoli anche le costruzioni da ideare. Il dubbio che siano solo costruzioni dell'uomo e non idee attinte direttamente dall'iperuranio platonico è legittimo, ma la loro misteriosa bellezza[9], la loro velata semplicità e l'armonia che le pervade lasciano accesa l'idea romantica del matematico come privilegiato lettore di un libro di perfezione divina[10].

5 Conclusioni

> "*La matematica è la regina delle scienze,*
> *e la teoria dei numeri è la regina della matematica.*"
> Carl Friedrich Gauss

Sono serviti migliaia di anni per arrivare a lavorare con i numeri reali e trovare un modo comodo e funzionale per rappresentarli. Sono bastati un paio di secoli per trasformarli nei modi più svariati. Il passo successivo è stato generalizzare tutto il lavoro svolto.

E così si è dato un nome alle strutture astratte che godono delle proprietà di cui godono i naturali (i monoidi abeliani), e con un procedimento analogo a quello per costruire gli interi, tali strutture sono state estese e sono stati definiti i gruppi. I gruppi sono stati estesi agli anelli. Poi, con una costruzione come quella che porta dai razionali ai reali, si sono definiti i campi. E le estensioni di campo (come i numeri complessi).

Studiando queste costruzioni si è osservato che gli insiemi numerici modellano il comportamento di una enorme quantità di strutture matematiche e di strutture i cui elementi sono strutture matematiche, arrivando a definire oggetti sempre più astratti (si pensi ai funtori ed alle categorie) che hanno in comune la stessa struttura di un insieme numerico.

All'inizio del saggio avevamo preso il vocabolario e letto che *numero* vuol dire "entità matematica astratta usata per descrivere una quantità", ora (seppure senza dettagli e solo a parole) un numero rappresenta un non meglio

[9] Come non citare la più bella equazione della matematica: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

[10] Questa affermazione potrebbe essere messa in crisi pensando ai teoremi di incompletezza di Gödel, tuttavia ritengo che la capacità di dimostrare le proprie limitazoni interne sia non un segno di debolezza ma un ulteriore conferma della divina bellezza che permea la matematica.

definito oggetto matematico (che può essere un insieme, una struttura, una figura geometrica, una classe di funzioni o quanto di più strano). Che cosa è dunque un numero?

L'unica conclusione che mi sembra si possa trarre è che nonostante ogni matematico affermi che la matematica non è studio dei numeri, in un modo o nell'altro sa bene che c'è un modo per potercela ricondurre. Forse i numeri permeano la matematica così a fondo che si può identificarla ad essi, tuttavia non c'è da allarmarsi: il mondo dei numeri è così vasto e misterioso che è ancora tutto da scoprire e studiare. Dunque Gauss aveva ragione, *la teoria dei numeri è la regina della matematica.*

Riferimenti bibliografici

[Coh89] P. M. Cohn. *Algebra - Vol. 2.* John Wiley & Sons, 1989.

[Gle00] James Gleick. *Caos.* Rizzoli, 2000.

[Hal98] Paul Richard Halmos. *Naive Set Theory.* Springer-Verlag, 1998.

[Jac85] Nathan Jacobson. *Basic Algebra I.* Freeman & Co, 1985.

[Knu74] Donald Knuth. *Surreal numbers.* Addison Wesley, 1974.

[Lon36] Mayme Longsdon. *A mathematician explains.* University of Chicago Press, 1936.

[Pea] Giuseppe Peano. *De aritmetica principia.*

[RM08] *Rudi Mathematici (http://www.rudimathematici.com)*, n. 113 - Giugno 2008.

[Ser07] Marcello Seri. Sugli insiemi numerici, 2007.

[WP] Wikipedia (http://www.wikipedia.org). Web site.

Indice