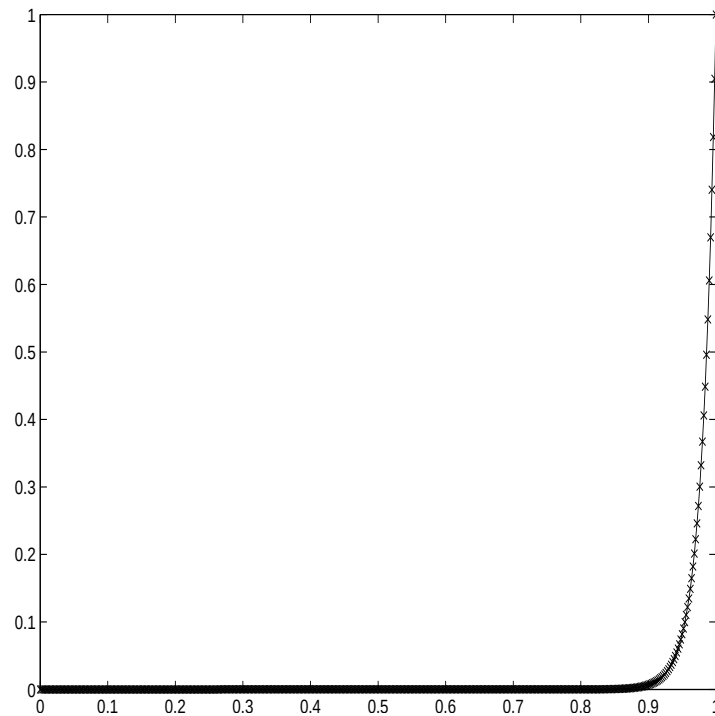


Equazione di convezione-diffusione
Esempi motivazionali

Equazione di convezione-diffusione

$$-\epsilon u'' + bu' = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, u(1) = 1$$

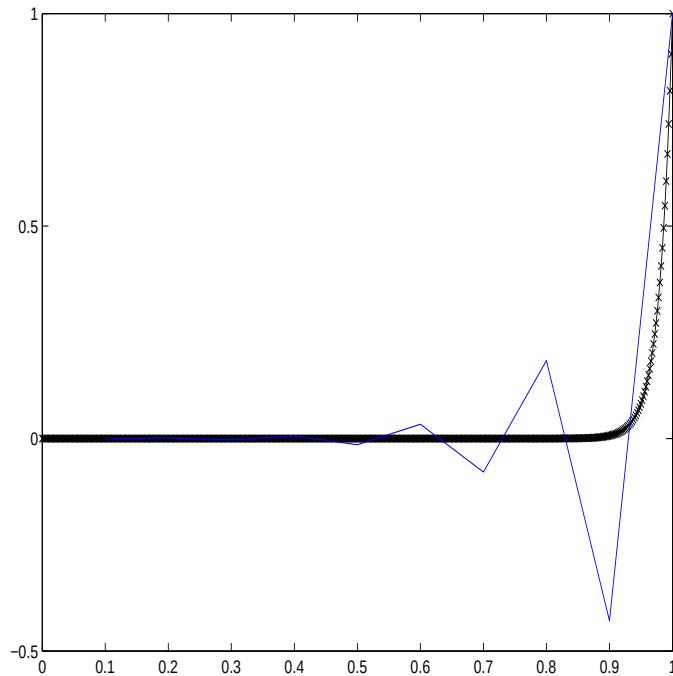


Soluzione esatta: $u(x) = \frac{e^{bx/\epsilon} - 1}{e^{b/\epsilon} - 1}$

strato al bordo $x = 1$ di larghezza $\mathcal{O}(\frac{\epsilon}{b})$ (se $\frac{\epsilon}{b}$ piccolo)

Equazione di convezione-diffusione

$$-\epsilon u'' + bu' = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, u(1) = 1$$



Differenze finite centrate per u'

$\Rightarrow$ accuratezza $O(h^2)$

Soluzione eqn differenze:

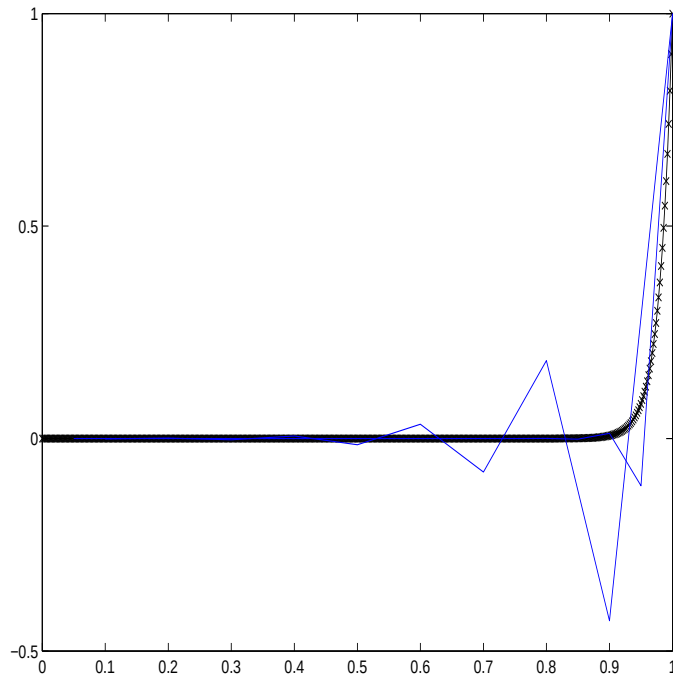
$$u_h(x_j) = \frac{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^j - 1}{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^N - 1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

$Pe := \frac{bh}{2\epsilon}$ numero di Peclet

$N = 10$

Equazione di convezione-diffusione

$$-\epsilon u'' + bu' = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, u(1) = 1$$



Differenze finite centrate per u'

$\Rightarrow$ accuratezza $O(h^2)$

Soluzione eqn differenze:

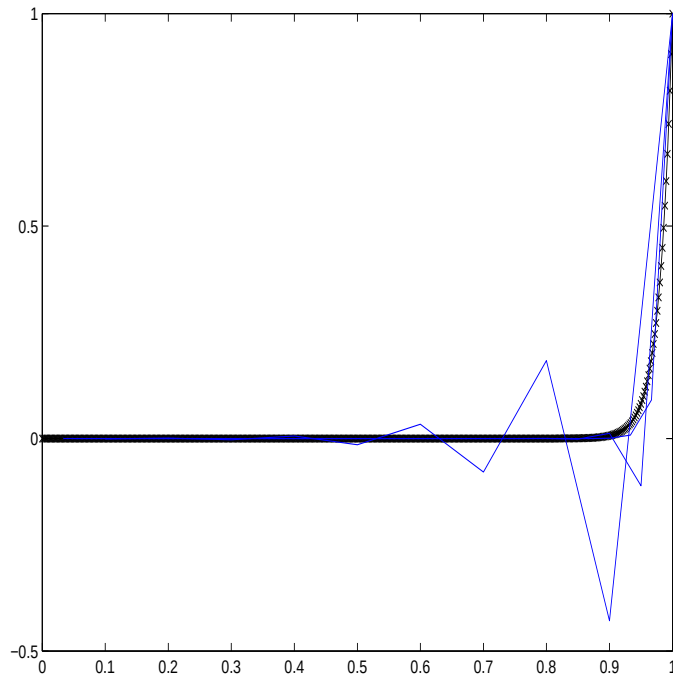
$$u_h(x_j) = \frac{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^j - 1}{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^N - 1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

$Pe := \frac{bh}{2\epsilon}$ numero di Peclet

N = 20

Equazione di convezione-diffusione

$$-\epsilon u'' + bu' = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, u(1) = 1$$



Differenze finite centrate per u'

$\Rightarrow$ accuratezza $O(h^2)$

Soluzione eqn differenze:

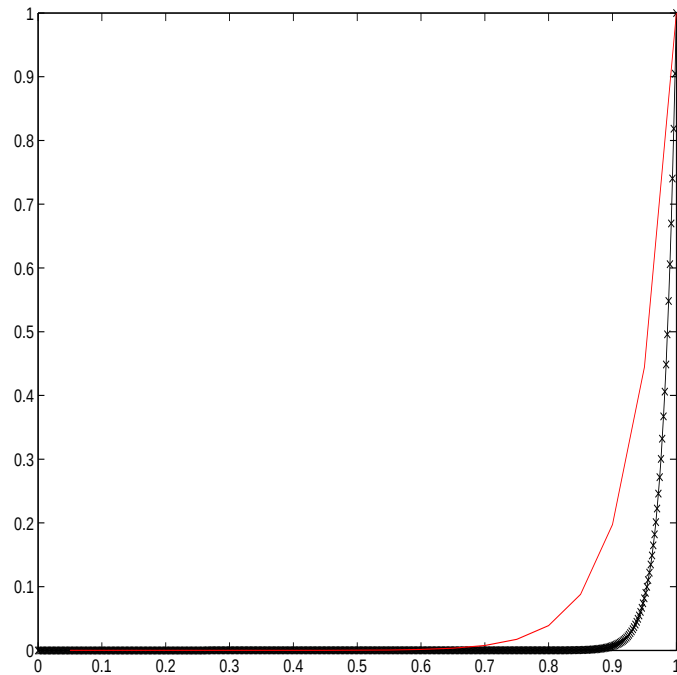
$$u_h(x_j) = \frac{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^j - 1}{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^N - 1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

$Pe := \frac{bh}{2\epsilon}$ numero di Peclet

N = 30

Equazione di convezione-diffusione

$$-\epsilon u'' + bu' = 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, u(1) = 1$$



$Pe > 1$: Differenze finite “up-wind” per $u' \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \Rightarrow$ accuratezza $O(h)$

Soluzione eqn differenze:

$$u_h(x_j) = \frac{(1 + Pe)^j - 1}{(1 + Pe)^N - 1}, \quad j = 1, \dots, N-1$$

$Pe := \frac{bh}{2\epsilon}$ numero di Peclet

$N = 20$

Equazione di convezione-diffusione

Pe	$\frac{2\varepsilon}{b}$	h	$ u - u_h _{\ell^2}$	$ u - u_h^{up} _{\ell^2}$
2.50	0.04	1.0000e-01	4.8065e-01	2.9168e-01
1.25	0.04	5.0000e-02	1.9329e-01	4.2096e-01
0.83	0.04	3.3333e-02	1.0191e-01	4.8043e-01
0.62	0.04	2.5000e-02	6.3881e-02	5.2043e-01
0.50	0.04	2.0000e-02	4.4574e-02	5.5374e-01