Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 11 Settembre 2014
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

1. Dopo aver determinato il dominio A della funzione
$$f\ :\ A \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{(x-2)^2}{x+1}\right),$$
trovarne eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x-x^2}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:
$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$$

4. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema omogeneo ammette soluzioni non banali:
$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Determinare quindi tali soluzioni.

5. Determinare la retta r passante per $A = (0,2,3)$ e $B = (1,1,1)$. Determinare l'equazione cartesiana del piano π ortogonale ad r e passante per A. Determinarne quindi l'equazione parametrica. Infine, determinare il piano parallelo a π e passante per l'origine.

6. i) Determinare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione
$$(iz)^3 = \frac{i(1+i)}{(-1+i)^2}.$$
ii) Riportare sul piano complesso tali soluzioni. iii) Verificare se la seguente disuguaglianza è vera: $\left|2i - \frac{i+1}{(i-2)(i+1)}\right| > |i-1|$.

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 11 Settembre 2014
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna
Domande di Teoria

1. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Quale di questi enunciati è vero?

   ☐ Se f è derivabile in $x_0 \in [a, b]$, allora f è ivi continua.

   ☐ f è derivabile in $x_0 \in [a, b]$ se e solo se f è ivi continua.

   ☐ Se f è continua in $x_0 \in [a, b]$, allora f è ivi derivabile.

2. Siano $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quale di queste affermazioni è vera?

   ☐ A non ha punti di accumulazione

   ☐ Tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono punti di accumulazione di A

   ☐ $x = 0$ non è un punto di accumulazione per A

3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}$ vettore incognito. Quale di queste affermazioni è vera?

   ☐ Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ allora dev'essere $A = 0$.

   ☐ Esiste ed è unica la soluzione $\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{b}$ se e solo se A è invertibile.

   ☐ Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è l'unica soluzione.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2(x)\cos(x)$. La sua derivata f' è data da:

   ☐ $f'(x) = 2\sin(x) + \cos(x)$

   ☐ $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

   ☐ $f'(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) - \sin^3(x)$

5. Quale di queste affermazioni corrisponde alla definizione di retta in forma parametrica in $\mathbb{R}^3$?

   ☐ Fissati $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = \{P \in \mathbb{R}^3, \langle P, P_0\rangle = t\|\mathbf{v}\|, t \in \mathbb{R}\}$

   ☐ Fissati $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = \{P \in \mathbb{R}^3, \langle P - P_0, \mathbf{v}\rangle = 0\}$

   ☐ Fissati $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ed il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, $r = \{P \in \mathbb{R}^3, P = P_0 + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}$