

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I
12 Settembre 2017
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

1. Dopo aver determinato il dominio A della funzione

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + 3x^2)e^{\frac{1}{x^2}},$$

trovarne eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2x^2)^{1/3}}{x^2}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:

$$\int_{-1}^1 \frac{|x|}{4 - x^2} dx$$

4. Dato il sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

determinare α in modo che il sistema ammetta soluzioni oltre a quella banale. Per tale valore di α determinare quindi tutte le soluzioni mediante il metodo di eliminazione di Gauss.

5. Determinare la distanza tra $P = (1, 1, -2)$ ed il piano π di equazione $x - y + 1 = 0$. Determinare quindi la retta passante per P e per $Q = (1, -3, 1) \in \pi$. Infine, determinare la retta per Q e perpendicolare a π .
6. i) Determinare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione

$$\left(\frac{1}{i}z\right)^4 = (i + 1)/(i - 1)^2.$$

ii) Riportare sul piano complesso tali soluzioni. iii) Verificare se la seguente disuguaglianza è vera: $\left|\frac{1}{i-1} + \frac{1-i}{1+i}\right| > 1$.

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 12 Settembre 2017

Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

Domande di Teoria

1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) \sin(x)$. La funzione f è derivabile in A perchè:
 - Perchè f è continua
 - Perchè f è prodotto di due funzioni derivabili
 - Perchè f è definita su tutto A

2. Sia A un insieme ordinato, e sia m un suo minorante. Allora
 - Non può esistere un minorante m
 - Per ogni $x \in A$ vale $m \leq x$
 - Per ogni $x \in A$ vale $m \geq x$

3. Siano $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ due matrici e sia $C = AB$ (prodotto matriciale tra A e B). Allora
 - C ha dimensioni $m \times m$
 - C ha dimensioni $p \times n$
 - C ha dimensioni $n \times p$

4. Siano $r_1: \{P \in \mathbb{R}^3 : P = P_0 + t\mathbf{v}, t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2: \{P \in \mathbb{R}^3 : P = Q_0 + t\mathbf{w}, t \in \mathbb{R}\}$ due rette di \mathbb{R}^3 . Quale di queste affermazioni è vera?
 - r_1 e r_2 sono parallele se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$
 - r_1 e r_2 sono parallele se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$
 - r_1 e r_2 sono ortogonali se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$

5. Sia dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Il sistema ammette una ed una sola soluzione se
 - A è invertibile
 - b coincide col vettore nullo
 - $\det(A) = 0$.