

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 23 Gennaio 2013
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

1. Dopo aver determinato il dominio A della funzione

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right),$$

trovarne eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti. Studiarne la convessità.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \frac{\cos(2x)}{\sin(x) \cos(x)}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$$

4. Determinare gli autovalori e gli autospazi della seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Determinare la distanza tra $P = (1, -1, 2)$ ed il piano π di equazione $x - y + 1 = 0$. Determinare quindi la retta passante per P e per $Q = (1, 2, 1) \in \pi$. Infine, determinare la retta per Q e perpendicolare a π .
6. i) Determinare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione

$$(z + 1)^4 = \frac{(i - 1)^3}{1 + i}.$$

- ii) Riportare sul piano complesso tali soluzioni. iii) Verificare se la seguente disuguaglianza è vera: $\left| \frac{1-i}{(2+i)^2} \right| > 2$.

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 23 Gennaio 2013

Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

Domande di Teoria

1. Sia f continua in $[a, b]$. Per $c \in [a, b]$, sia $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Individuare quale di queste affermazioni segue da queste ipotesi
 - F è integrabile
 - F è derivabile
 - F è una funzione costante

2. Sia f derivabile in (a, b) . Quale di queste affermazioni ne consegue?
 - Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$
 - Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$
 - f è crescente se e solo se $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$

3. Siano dati $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$. Quale di queste affermazioni corrisponde alla definizione di indipendenza lineare?
 - u_1, \dots, u_k sono lin.indip. se da $u_1\lambda_1 + \dots + u_k\lambda_k = 0$ segue $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.
 - u_1, \dots, u_k sono lin.indip. se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $u_1\lambda_1 + \dots + u_k\lambda_k = 0$.
 - u_1, \dots, u_k sono lin.indip. se per ogni i, j , vale $u_i = \alpha u_j$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Quale tra queste corrisponde alla definizione corretta di rango di una matrice?
 - $\text{rango}(A)$ è il massimo numero di righe o colonne lin. dipendenti di A
 - $\text{rango}(A)$ è il massimo numero di righe o colonne lin. indipendenti di A
 - $\text{rango}(A)$ è il minimo numero di righe o colonne lin. dipendenti di A

5. Due rette $r_i : P = P_i + tv_i, t \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ si dicono parallele se
 - $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$
 - $v_1 = v_2$
 - Esiste $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tale che $v_1 = \alpha v_2$