Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 23 Gennaio 2013
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna

1. Dopo aver determinato il dominio A della funzione
$$f\,:\,A\to\mathbb{R},\quad f(x)=\exp\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right),$$
trovarne eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti. Studiarne la convessità.

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos(2x)}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente integrale:
$$\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

4. Determinare gli autovalori e gli autospazi della seguente matrice
$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

5. Determinare la distanza tra $P=(1,1,-2)$ ed il piano π di equazione $x-y+1=0$. Determinare quindi la retta passante per P e per $Q=(1,2,1)\in\pi$. Infine, determinare la retta per Q e perpendicolare a π.

6. i) Determinare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione
$$(z+1)^5=\frac{(i-1)^3}{1+i}.$$
ii) Riportare sul piano complesso tali soluzioni. iii) Verificare se la seguente disuguaglianza è vera: $\left|\frac{1-i}{(2+i)^2}\right|>1$.

Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 23 Gennaio 2013
Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna
Domande di Teoria

1. Sia f continua in $[a, b]$. Per $c \in [a, b]$, sia $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. Individuare quale di queste affermazioni segue da queste ipotesi

   ☐ F è integrabile

   ☐ F è una funzione costante

   ☐ F è derivabile

2. Sia f derivabile in (a, b). Quale di queste affermazioni ne consegue?

   ☐ Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$

   ☐ f è crescente se e solo se $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$

   ☐ Esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$

3. Siano dati $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$. Quale di queste affermazioni corrisponde alla definizione di indipendenza lineare?

   ☐ $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.indip. se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ non tutti nulli tali che $u_1\lambda_1 + \ldots + u_k\lambda_k = 0$.

   ☐ $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.indip. se per ogni i, j, vale $u_i = \alpha u_j$ per qualche $\alpha \in \mathbb{R}$.

   ☐ $u_1, \ldots, u_k$ sono lin.indip. se da $u_1\lambda_1 + \ldots + u_k\lambda_k = 0$ segue $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$.

4. Quale tra queste corrisponde alla definizione corretta di rango di una matrice?

   ☐ rango(A) è il massimo numero di righe o colonne lin. indipendenti di A

   ☐ rango(A) è il massimo numero di righe o colonne lin. dipendenti di A

   ☐ rango(A) è il minimo numero di righe o colonne lin. dipendenti di A

5. Due rette $r_i : P = P_i + tv_i$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ si dicono parallele se

   ☐ $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

   ☐ $v_1 = v_2$

   ☐ Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ tale che $v_1 = \alpha v_2$