**Prova scritta di Istituzioni di Matematica I**
**24 Gennaio 2014**
**Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna**

1. **(Per Secondo Parziale)** Dopo aver determinato il dominio $A$ della funzione
$$f\,:\,A \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (1-x^2)e^x,$$
trovarne eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

2. **(Per Secondo Parziale)** Calcolare, se esiste, il seguente limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)}$$

3. **(Per Secondo Parziale)** Calcolare, se esiste, il seguente integrale:
$$\int_{-1}^{1} \ln(4-x^2)\,\mathrm{d}x$$

4. **(Per Secondo Parziale)** Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente sistema lineare ammette una sola soluzione.
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Determinare quindi tale soluzione per $\alpha = 1$ mediante il metodo di eliminazione di Gauss.

5. Sia $r_1$ la retta passante per $A = (-1, 2, 2)$ e parallela alla retta di equazione parametrica $s:\ P = (0, 1, -2) + t(1, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Determinare anche la retta $r_2$ passante per $A$ e per $B = (1, -3, 1)$. Determinare infine le equazioni cartesiane e parametriche del piano $\pi$ contenente $r_1$ ed $r_2$.

6. i) Determinare tutte le soluzioni complesse $z$ della seguente equazione
$$(z-i)^3 = \frac{(i-1)^2}{(i+1)i}.$$
ii) Riportare sul piano complesso tali soluzioni. iii) Verificare se la seguente disuguaglianza è vera: $\left|\frac{i-1}{2} + \frac{3-i}{3}\right| > \frac{1}{4}$ .

**Prova scritta di Istituzioni di Matematica I - 24 Gennaio 2014**
**Corso di Laurea in Scienze Ambientali - Ravenna**
**Domande di Teoria**

1. **(Per Secondo Parziale)** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$. Quale di queste funzioni è una primitiva di $f$?

   ☐ $F(x) = 1 + (\mathrm{tg}(x))^2$

   ☐ $F(x) = -\ln(\cos(x))$

   ☐ $F(x) = x\mathrm{tg}(x)$

2. **(Per Secondo Parziale)** Sia $A$ un insieme ordinato, e sia $m$ il suo estremo inferiore. Allora

   ☐ Per ogni $x \in A$ vale $m \leq x$

   ☐ Per ogni $x \in A$ vale $m \geq x$

   ☐ Esiste un $x \in A$ tale che $x \leq m$

3. **(Per Secondo Parziale)** Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Quale di queste affermazioni è vera?

   ☐ $f$ è continua su tutto l'insieme $\mathbb{R}$

   ☐ $f$ è derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$

   ☐ $f$ è definita su $A$ sottoinsieme stretto di $\mathbb{R}$ (cioè $A \neq \mathbb{R}$)

4. Siano $\pi_1$: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, e $\pi_2$: $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ due piani di $\mathbb{R}^3$. Quale di queste affermazioni è vera?

   ☐ $\pi_1$ e $\pi_2$ sono paralleli se $d_1 = d_2$

   ☐ $\pi_1$ e $\pi_2$ sono paralleli se $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

   ☐ $\pi_1$ e $\pi_2$ sono ortogonali se $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

5. Sia dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Il sistema ammette una ed una sola soluzione se

   ☐ $A$ è invertibile

   ☐ $b$ coincide col vettore nullo

   ☐ $\det(A) = 0$.