**Analisi Numerica e Software Scientifico, a.a.2014-2015**

Laboratorio del 05/03/2015

1. È dato il problema

$$-u'' = 1, \quad u(0) = 0, u'(\pi) = 0,$$

che ha soluzione $u(x) = \pi x - \frac{1}{2}x^2$.
i) Si considerino $N = 20$ elementi finiti lineari. Determinare la matrice di stiffness associata, ed il vettore dei termini noti calcolandolo esattamente
(in particolare, per $f \equiv 1$: $\int_{T_j} f v_h dx = \alpha_{j-1} \int_{T_j} \varphi_{j-1} dx + \alpha_j \int_{T_j} \varphi_j dx$).
Determinare quindi un'approssimazione numerica $u_h$ di $u$.
ii) Fare il grafico della funzione errore $e_h = u_h(x) - u(x)$ per $x \in [0, \pi]$, e calcolarne l'errore nella norma dell'energia, $a(e_h, e_h) = e_h^T K e_h$

2. È dato il problema

$$-u'' + u = f(x), \quad u(0) = 0, u'(\pi) = 0,$$

con $f(x) = -2e^x - 4(x - \pi)e^x - \pi^2$. La soluzione del problema è $u(x) = (x - \pi)^2 e^x - \pi^2$.
Per una successione di griglie con $N$ intervalli, $N = 2^k, k = 4, \dots, 10$, fare quanto segue:
i) Discretizzare l'equazione differenziale con $N$ elementi finiti. In particolare, discretizzare $(f, v_h)$ usando $(f, v_h) \approx (f_I, v_h) = \mathbf{f}^T M\alpha$ dove $v_h(x) = \sum_j \alpha_j \varphi_j(x)$.
Determinare la soluzione approssimante $u_h$ e fare il grafico di $u_h(x)$, $x \in [0, \pi]$; (usare `hold on` per apprezzare le modifiche in $u_h$ al crescere di $N$)
ii) Calcolare e "plottare" l'errore $e_h = u - u_h$ e visualizzare la norma energia $a(u - u_h, u - u_h)$;
iii) Approssimare gli autovalori estremi di $K, M$ e $K + M$ (usare la funzione Matlab `eigs`) e stimare dall'alto i corrispondenti numeri di condizionamento. Riportare su schermo tali valori al variare di $N$ e commentare (usare `disp` o `fprintf` per ottenere una pseudo tabella come segue)

| $N$ | $1/h$ | $1/h^2$ | cond$(M)$ | cond$(K)$ | cond$(K+M)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

iv) In alternativa all'uso di $f_I$, approssimare il termine $(f, v_h)$ tenendo conto che in ogni intervallo vale

$$\int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_{j-1} f(x)\varphi_{j-1}(x) + \alpha_j f(x)\varphi_j(x))dx = [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \begin{bmatrix} \int_{(j-1)h}^{jh} f(x)\varphi_{j-1}(x)dx \\ \int_{(j-1)h}^{jh} f(x)\varphi_j(x))dx \end{bmatrix}$$

Come cambia l'accuratezza?

**Comandi Matlab:**

`K=spdiags([a,b,c],-1:1,N,N)` con $a, b, c \in \mathbb{R}^N$ costruisce una matrice tridiagonale sparsa di dimensioni $N \times N$ con elementi diagonali nel vettore $b$, sottodiagonali $a$ e sopradiagonali $c$.