Analisi Numerica e Software Scientifico, a.a.2014-2015
Laboratorio del 12/03/2015

1. Consideriamo un fluido viscoso posto tra due piastre orizzontali, parallele e distanti $2H$. La piastra superiore è posta ad una temperatura T_{sup} e scorre a velocità V rispetto alla piastra inferiore, che è posta a temperatura T_{inf}. La temperatura $u : (0, 2H) \to \mathbb{R}$ del fluido tra le due piastre soddisfa il seguente problema di Dirichlet

$$-u'' = \alpha(H - x)^2, \quad x \in (0, 2H), \quad u(0) = T_{inf}, u(2H) = T_{sup},$$

dove $\alpha = 4V^2\mu/(H^4\kappa)$, $\kappa = 0.60$ è il coefficiente di conduttività termica e $\mu = 0.14$ kg s/m^2 è la viscosità media del fluido.
Per i valori $H = 1$m, $T_{inf} = 273$ K, $T_{sup} = 293$ K e $V = 10$ m/s, e per una successione di griglie con N intervalli, $N = 2^k, k = 4, \ldots, 12$, fare quanto segue:

i) Discretizzare l'equazione differenziale con uno spazio di elementi finiti lineari a tratti, su N sottointervalli. In particolare, chiamando f il termine forzante, discretizzare (f, v_h) usando $(f, v_h) \approx (f_I, v_h) = \mathbf{f}^T M\alpha$ dove $v_h(x) = \sum_j \alpha_j\varphi_j(x)$.

ii) Sapendo che la soluzione esatta è data da $u(x) = -\frac{\alpha}{12}(H-x)^4 + \frac{T_{sup}-T_{inf}}{2H}x + T_{inf} + \frac{\alpha H^2}{12}$, Calcolare e "plottare" l'errore $e_h = u - u_h$ e visualizzare la norma energia $a(u-u_h, u-u_h)$. Stimare inoltre l'ordine di convergenza usando la norma energia per due discretizzazioni successive.

iii) In alternativa all'uso di f_I, approssimare il termine (f, v_h) tenendo conto che in ogni intervallo vale

$$\int_{(j-1)h}^{jh} (\alpha_{j-1}f(x)\varphi_{j-1}(x) + \alpha_j f(x)\varphi_j(x))dx = [\alpha_{j-1}, \alpha_j] \begin{bmatrix} \int_{(j-1)h}^{jh} f(x)\varphi_{j-1}(x)dx \\ \int_{(j-1)h}^{jh} f(x)\varphi_j(x))dx \end{bmatrix}$$

usando una funzione di quadratura chiedendo una accuratezza di h^3, dove $h = 1/N$. Valutare come cambia l'accuratezza della soluzione u_h rispetto all'uso di f_I, al variare di N.

(iv) Per le griglie più grandi, $N = 10, 11, 12$, determinare una approssimazione della soluzione u_h mediante il metodo iterativo CG. Per il criterio d'arresto di CG, scegliere in modo sperimentale una tolleranza dipendente da h, in modo che la soluzione risultante $u_h^{(k)}$ abbia un errore $u - u_h^{(k)}$ confrontabile con $u - u_h$.