Analisi Numerica e Software Scientifico, a.a.2014-2015

Laboratorio del 26/02/2015

1. È dato L'operatore $Lu = -pu'' + qu$, $u = u(x)$ per $x \in [0, \pi]$, con $u(0) = 0, u'(\pi) = 0$ (p, q costanti). Le sue autocoppie sono

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right), \quad \lambda_n = p\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + q.$$

   a) Fare il grafico delle prime 5 autofunzioni nello stesso plot, usando simboli diversi, includendo una legenda.

   b) Verificare numericamente che la base è ortonormale (usare la funzione Matlab `quad` per il calcolo approssimato dell'integrale).

2. Per $f(x) = x$, determinare la proiezione $|(f, u_n)|$ di f sulla prime 5 autofunzioni di L e riportare i valori su di uno stesso grafico (usare di la funzione Matlab `quad` per il calcolo approssimato dell'integrale).
3. Per $p = q = 1$, considerare una soluzione approssimata di $Lu = f$ come

$$u_{\frac{1}{N}} = \sum_{n=1}^{N} \beta_n u_n, \quad \beta_n = \frac{(f, u_n)}{\lambda_n},$$

   per $N = 50$ e prenderla come soluzione di riferimento, u_{ex}.

   Per $N = 1, 2, \ldots, 8$:

   (a) Fare il grafico di $u_{\frac{1}{N}}$ per $x \in [0, \pi]$

   (b) Fare il grafico della funzione errore $u_{ex} - u_{\frac{1}{N}}$ per $x \in [0, \pi]$

   (c) Stimare l'errore $\|u_{\mathrm{ex}} - u_{\frac{1}{N}}\|_\infty = \max_{x\in[0,\pi]} |u_{ex}(x) - u_{\frac{1}{N}}(x)|$