Analisi Numerica e Software Scientifico, a.a.2014-2015

Laboratorio del 31/03/2015

È dato il problema ai valori al bordo

$$-\Delta u = f(x), \quad u(0) = 0, u(1) = 0.$$

con $f(x) = 10(1 - 10(x - 1/2)^2)e^{-5(x-1/2)^2}$, in modo che la soluzione sia $u = e^{-5(x-1/2)^2} - e^{-5/4}$.

1. Implementa l'algoritmo dei gradienti coniugati (CG) includendo un test d'arresto:

   Dato x_0, con $r_0 = b - Ax_0$ e $p_0 = r_0$
   Per $k = 0, 1, 2, \ldots$
   $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \qquad \alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$
   $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$
   $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k, \qquad \beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$

   ed usalo per determinare una soluzione approssimata del problema sopra con $N = 100$ elementi finiti lineari (usa una formula di quadratura per il prodotto scalare (f, φ_j)).
   Inserendo nel codice anche la soluzione esatta $x_\star$, ad ogni iterazione mostra $\|r_{k+1}\|, \|x_\star - x_{k+1}\|$ e $\|x_\star - x_{k+1}\|_A$, ed una volta arrivato alla soluzione richiesta, fai il tre grafici corrispondenti, tutti nella stessa figura. Includi quindi la stima asintotica

   $$\|e_k\|_A \leq 2\|e_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^m$$

   e commenta.
2. Usando la notazione degli elementi finiti, siano $\boldsymbol{\alpha}$ la soluzione esatta del sistema, e $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ la soluzione approssimata ottenuta dopo k iterazioni di CG. Si ha quindi che

   $$u_h = \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j \phi_j, \qquad u_h^{(k)} = \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j^{(k)} \phi_j$$

   sono la soluzione approssimata di u con il metodo di Ritz-Galerkin, e la sua approssimazione dopo k iterazioni di CG. Verifica computazionalmente che vale la seguente importante relazione

   $$a(u - u_h^{(k)}, u - u_h^{(k)}) = a(u - u_h, u - u_h) + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}\|_K^2.$$

   In particolare, usa il fatto che per questo problema vale $a(u - u_h^{(k)}, u - u_h^{(k)}) = \|u' - (u_h^{(k)})'\|^2$, dove $u'(x) = (5 - 10x)e^{-5(x-\frac{1}{2})^2}$.