

- Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y & 0 < t \leq 30 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Determinare un'approssimazione della soluzione con il metodo di Eulero esplicito che assicuri la assoluta stabilità del metodo (si confronti con la condizione di stabilità). Riportare questi valori su un grafico, insieme al risultato ottenuto dalla funzione matlab `[t,y]=ode45(fun,[0,30],1)`.

- Per studiare l'assoluta stabilità nel caso generale $y' = f(t, y)$, supponiamo che $\partial f / \partial y(t, y) < 0$ per ogni $t \geq 0$ e per ogni y . Se $\lambda_{\max}$ è tale per cui

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) < -\lambda_{\max},$$

allora, il metodo di Eulero esplicito è stabile se $0 < h < 2/\lambda_{\max}$.

Sfruttare questo risultato per risolvere numericamente il problema di Cauchy

$$y'(t) = \arctan(3y) - 3y + t, \quad t > 0, \quad y(0) = 1,$$

essendo $f_y = 3/(1 + 9y^2) - 3$, cosicchè $\lambda_{\max} = \max |f_y| = 3$.

- Consideriamo il seguente sistema di equazioni di Lotka-Volterra, associate all'interazione tra 2 popolazioni di batteri, y_1 e y_2 ,

$$\begin{cases} y'_1 = C_1 y_1 (1 - b_1 y_1 - d_2 y_2) \\ y'_2 = -C_2 y_2 (1 - b_2 y_2 - d_1 y_1) \end{cases}$$

con $C_1 = C_2 = 1$, $b_1 = b_2 = 0$, $d_1 = d_2 = 1$. Risolvere numericamente questo problema, per $y_1(0) = 2$, $y_2(0) = 2$ e $t \in [0, 10]$, usando Eulero esplicito con passo di integrazione $h = 0.005$ (sperimentare anche con altri valori del passo).

Riportare i risultati sul piano delle fasi, e su un grafico di evoluzione nel tempo per entrambe le popolazioni.

Confrontare con `ode45`.

Studiare il comportamento¹ delle soluzioni partendo dal dato iniziale $y_1(0) = 1.2$, $y_2(0) = 1.2$.

¹Il sistema ammette 2 punti di equilibrio, cioè punti in cui $y'_1 = y'_2 = 0$, ed uno di questi è (1,1), mentre l'altro è (0,0). Queste sono le soluzioni dell'equazione non lineare associata. (0,0) è punto di equilibrio instabile, mentre (1,1) è punto di equilibrio stabile...