Metodi Numerici, a.a. 2011-2012. Progetto Finale. (G. Mensali)

Si consideri il seguente esempio di modello di un reattore chimico, in cui la conservazione della massa può essere espressa come un bilancio tra il materiale chimico che entra ed esce dal volume del sistema, cioè il volume limitato da due bordi.

Si consideri un dominio di tipo cilindrico (cosi sottile che si può pensare in una sola variabile) con un singolo punto di entrata e di uscita. Sotto condizioni appropriate, un bilancio di massa può essere ottenuto mediante la seguente equazione (di avvezione-dispersione)

$$u_t = Du_{xx} - Uu_x - \gamma u, \quad x \in [0, L],\, t \geq 0,$$

dove $V$ = volume ($m^3$), $F$ = flusso ($m^3/h$), u è la concentrazione (moli/$m^3$), $D$ è il coeff. di dispersione ($m^2/h$), $A$ è l'area della sezione di cilindro ($m^2$), e $\gamma$ il coefficiente di decadimento del prim'ordine ($h^{-1}$). $U = F/A$ è la velocità dell'acqua che passa attraverso il tubo.

Si consideri il problema allo stato stazionario, e dunque $u = u(x)$.

Prima di $t = 0$, il reattore è riempito con acqua senza prodotto chimico. Al tempo $t = 0$ viene introdotto un prodotto chimico ad un livello costante $u_{in}$, con le sequenti condizioni al bordo: $u_{in} = u(0) - \frac{D}{U}(u(0))_x$, e $u_x(L) = 0$. Quindi il problema allo stato stazionario è dato da:

$$\begin{cases} Du_{xx} - Uu_x - \gamma u = 0, \quad x \in (0, L), \\ u_{in} = u(0) - \frac{D}{U}(u(0))_x, \\ u_x(L) = 0. \end{cases}$$

Si considerino i dati $L = 10$ (in metri), $D = 1$, $F/A = 1$, $\gamma = 0.2$ e $u_{in} = 100$.

Determinare una approssimazione della soluzione del problema ellittico mediante differenze finite. In particolare:

1. Descrivere il metodo numerico adottato;
2. Studiare graficamente la convergenza del metodo all'aumentare dei punti di griglia;
3. Valutare come cambia la soluzione al variare del dato al bordo $u_{in}$, per alcuni valori significativi di $u_{in}$ in $[0, 1000]$.