

Si consideri il seguente modello di crescita di von Bertalanffy, nello studio della crescita della carpa in acquacultura intensiva:

$$(0.1) \quad \frac{dW}{dt} = -3KW \left(1 - \frac{W_\infty^{1/3} - cB}{W^{1/3}} \right)$$

dove W è il peso medio degli individui, che prevede il tasso di crescita di un individuo come funzione della misura e della densità di biomassa (B) della popolazione. Gli altri parametri sono: C è una misura dell'intensità di competizione intraspecifica, K è una misura di metabolismo, e W_∞ è una misura di produttività dell'habitat.

Le curve di crescita previste dal modello possono avere varie forme, a seconda della dinamica della popolazione di biomassa. Sono di interesse due casi particolari:

- i) Popolazioni con più coorti, caratterizzati da B costante. In questo caso l'equazione (0.1) è rappresentativa;
- ii) Popolazioni con una singola coorte, tipiche delle acquaculture, con una crescita molto significativa di biomassa (B) durante il periodo di produzione. In questo caso, è preferibile far dipendere B da W , per esempio come $B = NW$, con N la densità numerica della coorte. L'equazione diventa quindi

$$(0.2) \quad \frac{dW}{dt} = -3KW \left(1 - \frac{W_\infty^{1/3} - cNW}{W^{1/3}} \right)$$

Per i due modelli descritti sopra:

1. Descrivere il metodo usato per la risoluzione numerica delle equazioni differenziali ordinarie sopra descritte;
2. Confrontare i due modelli di crescita media del peso, mediante risoluzione numerica per una serie di possibili scelte di parametri:

Population	K (per year ⁻¹)	W_∞ (kg)	c (ha kg ^{-2/3})
Mixed age, fertilized	0.23	44.10	0.0068
Mixed age, unfert.	0.19	22.92	0.0073
Cohort	0.27	23.60	0.0096

ed $N = 50$, per una coorte di un anno di età, con peso medio iniziale $W(0) = 0.04$ kg.

Analizzare la dipendenza delle soluzioni numeriche dai parametri scelti.

3. Determinare il peso asintotico $W_{\infty N}$ degli individui in una coorte di densità numerica $N = 50$, mediante risoluzione numerica di $\frac{dW}{dt} = 0$ in (0.1) e in (0.2) (si noti che ogni equazione ha tre soluzioni, ma solo una soddisfa $0 < W_{\infty N} < W_\infty$.) Descrivere il metodo numerico utilizzato.

Confrontare quindi i risultati per i due modelli.