Corso di Laurea in Informatica

Corso di Analisi Matematica - Gruppo M-Z

20 settembre 2006

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1
(pt.2,5 /2) Sia $A = \mathbf{R}$, e sia $f : A \to \mathbf{R}$ definita come segue

$$f(x) = e^{|x|}\sqrt{1+x^2}.$$

a) Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup_{x\in A} f(x)$, $\inf_{x\in A} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in A.
b)dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = \lambda$, per $\lambda \in \mathbf{R}$.
Risposta: a) La funzione f è pari, quindi la studiamo solo su $\mathbf{R}^+$. Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre, essendo

$$f'(x) = e^x\sqrt{1+x^2} + \frac{e^x x}{\sqrt{1+x^2}}$$

è chiaro che $f'(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^+$.
Avremo quindi

$$\sup_{x\in A} f(x) = +\infty, \qquad \inf_{x\in A} f(x) = \min_{x\in A} f(x) = 1.$$

b) A causa della monotonia trovata al punto a), l' equazione $f(x) = \lambda$ ha due soluzioni reali per ogni $\lambda > 1$ ed una sola soluzione per $\lambda = 1$.

Esercizio 2
(pt. 4,5) Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x + 2\sin x - 3}\, dx.$$

Risposta: Facendo il cambiamento di variabile $t = \sin x$ si ha :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x \sin x}{\sin^2 x + 2\sin x - 3}\, dx. &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{t}{t^2+2t-3}\, dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{4(t-1)} + \frac{3}{4(t+3)} \right) dt \\
&= \frac{1}{4}\big[\ln|t-1| + 3\ln|t+3| \big]_{x=0}^{x=1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{4}\big[\ln(|t-1| \cdot (t+3)^3) \big]_{x=0}^{x=1/\sqrt{2}} \\
&= \ln \frac{(1-\sqrt{2})(1+3\sqrt{2})^3}{36}
\end{aligned}$$

Esercizio 3
(pt. 4,5) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x(\sin x - \sinh x)}{\sqrt{\cos x} - 1 - \ln(1+2x^2)}$$

Risposta: Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x(\sin x - \sinh x)}{\sqrt{\cos x} - 1 - \ln(1+2x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x+o(x))[x - x^3/6 + o(x^4) - (x + x^3/6 + o(x^4))]}{\sqrt{1 - x^2/2 + o(x^2)} - 1 - (2x^2 + o(x^2))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x+o(x))(-x^3/3 + o(x^4))}{1 - x^2/4 + o(x^2) - 1 - 2x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-x^4}{3} + o(x^4)}{\frac{-9}{4}x^2 + o(x^2)} = 0.
\end{aligned}$$

Esercizio 4
(pt.4,5) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{1+n^2} - n)^\alpha}{n^3+n^2}$$

Risposta: Utilizzando la formula di Taylor, per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+n^2} - n &= \frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{n(\sqrt{1+1/n^2}+1)} \\
&= \frac{1}{n(1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + 1)} = \frac{1}{2n}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Inoltre, poichè per $n \to +\infty$ si ha $n^3 + n^2 = n^3(1+o(1))$, abbiamo

$$\frac{(\sqrt{1+n^2} - n)^\alpha}{n^3+n^2} \sim \frac{1}{n^{\alpha+3}}$$

e quindi per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $\alpha > -2$.

Esercizio 5
(pt. 2,5/2) Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = e^y - e^{x+y} + x$$

a) determinare i punti stazionari e dire se essi sono punti di massimo o di minimo relativo per f.
b) Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 1)$ ove $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Risposta: a) Essendo $\nabla f(x, y) = (-e^{x+y} + 1, e^y - e^{x+y})$, si vede che l'unico punto stazionario è il punto (0,0). Calcolando la matrice hessiana di f nel punto si vede che $(0, 0)$ non è un punto nè di massimo nè di minimo per f, è un punto di sella (o colle).
b) Poiché $\nabla f(0, 1) = (-e + 1, 0)$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1) = \langle(-e + 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\rangle = \frac{-e + 1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio 6
(pt.4,5) Calcolare

$$\int_A \frac{x}{x^2 + y} \, dx \, dy$$

ove

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ 0 \le x \le y \le 2\}.$$

Risposta:

$$\begin{aligned}
\int_A \frac{x}{x^2 + y} \, dx \, dy &= \int_0^2 (\int_0^y \frac{x}{x^2 + y} \, dx) \, dy = \int_0^2 \frac{1}{2} \big[\ln(x^2 + y) \big]_{x=0}^{x=y} \, dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(y + 1) \, dy = \frac{1}{2} \int_1^3 \ln t \, dt \\
&= \frac{1}{2} \big[t \ln t - t \big]_1^3 = \frac{1}{2}(3 \ln 3 - 2).
\end{aligned}$$