Corso di Laurea in Informatica

Corso di Analisi Matematica - Gruppo M-Z

12 luglio 2006

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1
(pt.2,5/2) Sia $f : [0, 4\pi[\to \mathbf{R}$ definita come segue

$$f(x) = e^{\cos x + \sin x}.$$

a) Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup_{x\in A} f(x)$, $\inf_{x\in A} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in A.
b)Dire quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 2$ nell'intervallo $[0, 4\pi[$.
Risposta:
a) Si ha: $f \in C^\infty([0, 2\pi[)$, $f(0) = f(4\pi) = 1$. Siccome f è periodica di periodo 2π basta studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi[$. Si ha

$$f'(x) = e^{\cos x + \sin x}(-\sin x + \cos x)$$

e quindi $f'(x) = 0$ in $[0, 2\pi[$ sse $x = \dfrac{\pi}{4}$ o $x = \dfrac{3\pi}{4}$
Poichè $f(\dfrac{\pi}{4}) = e^{\sqrt{2}}$, $f(\dfrac{3\pi}{4}) = e^{-\sqrt{2}}$ abbiamo

$$\sup_{x\in A} f(x) = \max_{x\in A} f(x) = e^{\sqrt{2}}, \qquad \inf_{x\in A} f(x) = \min_{x\in A} f(x) = e^{-\sqrt{2}}.$$

b) Poichè $e^{-\sqrt{2}} < 2 < e^{\sqrt{2}}$, analizzando il grafico di f si vede che l' equazione $f(x) = 2$ ha 4 soluzioni distinte nell-intervallo $[0, 4\pi[$..

Esercizio 2
(pt. 4,5) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} x^2(\cos x + \sin x)\, dx$$

Risposta:
Utilizzando il metodo di integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x^2(\cos x + \sin x)\, dx &= [x^2(\sin x - \cos x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x(\cos x - \sin x)\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} + [2x(\cos x + \sin x)]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x)\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \pi - 2[\sin x - \cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} + \pi - 4\end{aligned}$$

Esercizio 3
(pt. 4,5) Calcolare

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2) - 2x^2 e^{-x} - x^2 \sin 2x}{x^4 + 3x^5}$$

Risposta:
Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} I &= I = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} + o(x^4) - 2x^2(1 - x + \frac{x^2}{2} + o(1)) - x^2(2x + o(x^2))}{x^4(1+o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-3x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} = -3 \end{aligned}$$

Esercizio 4
(pt.4,5) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \mathrm{arctg}(n + \sqrt{n})(\ln(n^2\sqrt{n} + n + 1) - \ln(n^2\sqrt{n} + n))$$

Risposta:
Per le propriet à del logaritmo si ha

$$\ln(n^2\sqrt{n} + n + 1) - \ln(n^2\sqrt{n} + n) = \ln(1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n} + n})$$

e quindi, utilizzando la formula di Taylori per $n \to +\infty$,

$$n^\alpha \mathrm{arctg}(n+\sqrt{n})(\ln(1+\frac{1}{n^2\sqrt{n}+n})) = n^\alpha(\frac{\pi}{2}+o(1))(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}(1+o(1)) = n^{\alpha-5/2}$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico, si ha che la serie converge se e solo se $\alpha < \frac{3}{2}$.

Esercizio 5
(pt. 2,5/2) Data $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = 4x^3 + 6xy + 6y^4$$

a) determinare i punti stazionari e dire se essi sono punti di massimo o di minimo relativo per f.
b) Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 0)$ ove $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
Risposta:
a) Si ha $\nabla f(x, y) = (12x^2 + 6y, 6x + 24y^3)$ e quindi i punti stazionari sono $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
Calcolando la matrice hessiana di f nei punti si vede che $(0, 0)$ non è un

punto nè di massimo nè di minimo mentre $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ è un punto di minimo relativo per f

b) Poiché $\nabla f(1,1) = (18, 30)$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(11) = \langle (18,30), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle = 24\sqrt{2}$$

Esercizio 6

(pt.4,5) Calcolare

$$\int_A x \, dx \, dy$$

ove

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \; ; \; x+1 \le y \le 2x+2, y \le 2-2x^2\}.$$

Risposta:

$$\begin{aligned} \int_A y \, dx \, dy &= \int_{-1}^{0} x(\int_{x+1}^{2+2x} dy) \, dx + \int_0^{1/2} x(\int_{x+1}^{2-2x^2} dy) \, dx \\ &= \int_{-1}^{0} (x^2+x) \, dx + \int_0^{1/2} (-2x^3 - x^2 + x) \, dx = -\frac{11}{96} \end{aligned}$$