Corso di Laurea in Informatica

Corso di Analisi Matematica

18 gennaio 2010

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1 (pt.4,5)
Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita come segue

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+4}.$$

Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x)$, $\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in $\mathbf{R}$.
Risposta:
La funzione $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, è una funzione pari e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre, per $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{x(-x^2+2)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+1}}$$

e quindi $f'(x) = 0$ sse $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$ e $f(0) = 1/4, f(\pm\sqrt{2}) = \sqrt{3}/6$. Quindi

$$\max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \sqrt{3}/6$$

mentre f non ha minimo e

$$\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 0$$

Esercizio 2(pt. 4,5)
Calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}+2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+3}\,dx$$

Risposta: Facendo il cambiamento di variabile $y = e^x$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^{3x}+2e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+3}\,dx &= \int_1^e \frac{y^2+2y}{y^2+2y+3}\,dy \\
&= \int_1^e 1\,dy - 3\int_1^e \frac{1}{(y+1)^2+2}\,dy \\
&= e-1-\frac{3}{\sqrt{2}}[\mathrm{arct}(\frac{y+1}{\sqrt{2}})]_1^e \\
&= e-1-\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arct}(\frac{e+1}{\sqrt{2}})+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{arct}(\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Esercizio 3 (pt. 4,5)
Calcolare
$$I = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2\sin x)^{1/x} - \cos(x)}{\sqrt{1+x^2} - \cos(3x)}$$
Risposta: Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x \ln(1+x^2\sin x)} - \cos(x)}{(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)) - (1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x \ln(1+x^3+o(x^3))} - (1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)) - (1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2))} \\
&= \frac{e^{(x^3+o(x^3))/x} - (1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{5x^2+o(x^2)} = \frac{e^{x^2+o(x^2)} - (1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{5x^2+o(x^2)} \\
&= \frac{1+x^2+o(x^2) - (1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{5x^2+o(x^2)} = \frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{5x^2+o(x^2)} = \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 (pt.4,5)
Risolvere la seguente equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili
$$y' = \frac{x}{y+1}$$
con condizione iniziale $y(0) = 2$.
Risposta: Si ha

$$y'(x)(y(x)+1) = x$$
e quindi integrando tra 0 e t otteniamo
$$\int_0^t y'(x)(y(x)+1)\,dx = \int_0^t x\,dx$$
Facendo il cambiamento di variabile $y(x) = s$, otteniamo
$$\int_2^{y(t)} s+1\,ds = \frac{t^2}{2}$$
Integrando, otteniamo
$$\left[\frac{s^2}{2}+s\right]_2^{y(t)} = \frac{t^2}{2}$$
e quindi
$$\frac{y^2(t)}{2} + y(t) - 4 = \frac{t^2}{2}$$
i.e.
$$y^2(t) + 2y(t) - 8 - t^2 = 0$$

e ricavando la y dalla precedente equazione si ottiene

$$y(t) = -1 + \sqrt{9 + t^2}$$

poichè $y(0) = 2 > 0$