Corso di Laurea in Informatica per il Management

Corso di Laboratorio di matematica generale

3 giugno 2010

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1 (pt.7,5)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - x + 1)$$

Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)$, $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in $\mathbf{R}$.
Risposta:
Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Inoltre $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ e

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)}$$

e quindi $f'(x) = 0$ iff

$$x = -1, \quad x = 1$$

e $f(-1) = \ln(2/3) < 0, f(1) = \ln 2$.
Quindi f ha massimo e minimo su R e

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \ln(2/3), \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \max_{x \in \mathbf{R}} f(x) = \ln 2$$

Esercizio 2(pt. 7,5)
Calcolare

$$I = \int_0^1 \ln(x^2 + 3x + 2)\, dx$$

Risposta:
Integrando per parti e applicando il metodo dei fratti semplici si ottiene

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (x)' \ln(x^2 + 3x + 2)\, dx = [x \ln(x^2 + 3x + 2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x(2x+3)}{x^2 + 3x + 2}\, dx \\ &= \ln 6 - 2\int_0^1 x\, dx + \int_0^1 \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 2}\, dx = \ln 6 - 2 + \int_0^1 \frac{1}{x+1}\, dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x+2}\, dx = \\ &= \ln 6 - 2 - [\ln(x+1)]_0^1 + 2[\ln(x+2)]_0^1 = -2 + \ln 27 \end{aligned}$$

Esercizio 3(pt. 7,5)
Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x+x^2) - 2e^{x^3} + \ln(1+x^2)}{(\sqrt{1+x}-x)\mathrm{arct}^2(\pi x)}$$

Risposta: Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^3)) - 2(1+x^3+o(x^3)) + x^2 + o(x^3)}{(1+o(1)-x)\pi^2 x^2(1+o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-4x^3(1+o(1))}{\frac{1}{2}\pi^2 x^2(1+o(1))} = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 4 (pt. 7,5)
Calcolare la soluzione della equazione differenziale

$$y' = y^2 \cos x$$

con condizioni iniziali $y(0) = 1$ e calcolare il $\lim\limits_{t\to\pi/2^-} y(t)$
Risposta:
L'equazione in esame e' una equazione differenziale a variabili separabili
Integrando si ha

$$\frac{y'}{y^2} = \cos x$$

i.e.

$$-\frac{1}{y(t)} + 1 = \int_0^t \cos x \, dx$$

e quindi

$$-\frac{1}{y(t)} + 1 = \sin x$$

i.e.

$$y(t) = \frac{1}{1-\sin x}$$

Dunque

$$\lim_{t\to\pi/2^-} y(t) = +\infty$$