Corso di Laurea in Informatica per il Management

Corso di Laboratorio di matematica generale

6 luglio 2010

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1 (pt.7,5)
Data $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}$
$$f(x) = \ln(xe^{x^2-3x+1})$$
Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup_{x\in]0,\infty[} f(x)$, $\inf_{x\in]0,\infty[} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in $]0, \infty[$.
Risposta:
Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
Inoltre $f \in C^\infty(]0, \infty[)$ e
$$f'(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x}$$
e quindi $f'(x) = 0$ iff
$$x = 1/2, \quad x = 1$$
e $f(1/2) = \frac{1}{4} - \ln 2 < 0, f(1) = -1$.
Quindi f non ha ne' massimo ne' minimo ha massimo e minimo su $]0, \infty[$ e
$$\inf_{x\in]0,\infty[} f(x) = -\infty, \qquad \sup_{x\in]0,\infty[} f(x) = +\infty$$

Esercizio 2(pt.7,5)
Calcolare
$$I = \int_1^{64} \frac{1}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}\, dx$$
Risposta:
Facendo il cambiamento di variabili $x = y^6$ si ottiene
$$\begin{aligned} I &= 6\int_1^2 \frac{y^3}{2+y}\, dy = 6\left(\int_1^2 (y^2 - 2y + 4)\, dy - 8\int_1^2 \frac{1}{2+y}\, dy\right) \\ &= 6[\frac{y^3}{3} - y^2 + 4y - 8\ln(2+y)]_1^2 \\ &= 20 - 48\ln(4/3) \end{aligned}$$

Esercizio 3(pt.7,5)
Calcolare
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2\sqrt{x^2+1}+2}{x(\sin^2(x+x^3)-x)}$$
Risposta: Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^2 - 2(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{8}+o(x^4))+2}{x(x+x^3-\frac{1}{6}(x+x^3)^3+o(x^3)-x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)-x^2+\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x(x^3-\frac{1}{6}x^3+o(x^3))} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}(1+o(1))}{\frac{5}{6}x^4(1+o(1))} = -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Esercizio 4(pt. 7,5) Calcolare la soluzione della equazione differenziale
$$y' = -\frac{y}{x} + \cos x$$
con condizioni iniziali $y(\pi/2) = 3$
Risposta:
L'equazione in esame e' una equazione differenziale a lineare non omogenea quindi la soluzione e' data dalla formula
$$y(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x}\int_{\pi/2}^{x} t\cos t\ dt$$
e quindi calcolando l'integrale otteniamo la soluzione
$$y(x) = \frac{\pi}{x} + \frac{\cos x}{x} + \sin x$$