Corso di Laurea in Informatica

Corso di Analisi Matematica

17 maggio 2010

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1 (pt.5)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x^2-x-1}$$

Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x)$, $\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in $\mathbf{R}$.
Risposta:
Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

Inoltre $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ e

$$f'(x) = -x(2x + 1)(x + 1)e^{-x^2-x-1}$$

e quindi $f'(x) = 0$ iff

$$x = -1, x = -1/2, x = 0$$

e $f(-1) = e^{-1}, f(-1/2) = \frac{3}{4}e^{-3/4}$ e $f(0) = e^{-1}$ Chiaramente $\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 0$ e $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = e^{-1}$

Esercizio 2(pt. 5)
Calcolare

$$I = \int_{1/e}^{1} \frac{\ln^3 x}{x(\ln^2 x + \ln x + 2)}\, dx$$

Risposta:
Facendo il cambiamento di variabile $y = \ln x$ e poi la decomposizione in fratti semplici si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{0} \frac{y^3}{y^2 + y + 2}\, dy = \int_{-1}^{0} (y-1)\, dy - \int_{-1}^{0} \frac{y-2}{y^2+y+2}\, dy \\
&= [\frac{y^2}{2} - y]_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{2y+1}{y^2+y+2}\, dy + \frac{5}{2}\int_{-1}^{0} \frac{1}{(y+1/2)^2 + 7/4}\, dy = \\
&= -\frac{3}{2} + [\ln(y^2+y+2)]_{-1}^{0} + \frac{5}{\sqrt{7}}[\operatorname{arctg}(\frac{2y}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}})]_{-1}^{0} = -\frac{3}{2} + \frac{10}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(1/\sqrt{7})
\end{aligned}$$

Esercizio 3(pt. 5)
Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 - x^2}{\sin(x^2) - x^2} e^x \ln(1+x^2)$$

Risposta: Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 - x^2}{x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^8) - x^2}(1+o(1))x^2(1+o(1)) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{-\frac{x^6}{6} + o(x^8)} x^2(1+o(1)) = 2 \end{aligned}$$

Esercizio 4 (pt. 5)
Per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{1+n^4} - n^2)^\alpha}{\ln^2(1+n^2)} \sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

Risposta: Poiche'

$$\sqrt{1+n^4} - n^2 = \frac{(\sqrt{1+n^4} - n^2)(\sqrt{1+n^4} + n^2)}{\sqrt{1+n^4} + n^2} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$\ln^2(1+n^2) \sim \ln^2(n^2) \sim 4\ln^2 n$$

e

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

per $n \to \infty$, si ha

$$\frac{(\sqrt{1+n^4} - n^2)^\alpha}{\ln^2(1+n^2)} \sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}}) \sim \frac{1}{4n^{2\alpha+1/2} \ln^2 n}$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie converge sse $\alpha \geq 1/4$.

Esercizio 5
(pt. 5) Calcolare

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y}$$

a)Determinare i punti stazionari di f e dire se essi sono punti di massimo o di minimo relativo.
b)Calcolare $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,-1)$ ove $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Risposta:
a) Si ha $\nabla f(x,y) = (y(1-2x^2)e^{-x^2-y}, x(1-y)e^{-x^2-y})$ e quindi i suoi punti stazonari sono $(0,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ Calcolando la matrice hessiana di

f si vede il punto $(0,0)$ non è nè di massimo nè di minimo relativo il punto $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ è un punto di massimo mentre il punto $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$ è un punto di minimo per f

b) Poiché $\nabla f(1,-1)=(1,2)$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1)=\langle(1,2),(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

Esercizio 6

(pt. 5) Calcolare

$$I=\int_A y dx\, dy$$

ove

$$A=\{(x,y)\in\mathbf{R}\ ;\ x^2+y^2\leq 11/4,\quad y\leq x^2+1\}$$

Risposta:

Si ha $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}\ ;\ x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}],\quad 1+x^2\leq y\leq\sqrt{\frac{11}{4}-x^2}\}$ e quindi

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{1+x^2}^{\sqrt{\frac{11}{4}-x^2}} y\, dy\, dx=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[\frac{y^2}{2}]_{1+x^2}^{\sqrt{\frac{11}{4}-x^2}}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{7}{4}-3x^2-x^4)\, dx=\frac{1}{2}[\frac{7}{4}x-x^3-\frac{1}{5}x^5]_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}\end{aligned}$$