Corso di Laurea in Informatica per il Management

Corso di Laboratorio di matematica generale

23 settembre 2010

Prof. Vania Sordoni

Esercizio 1 (pt. 7.5)
Data $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{x^2+2}{2x^2-2x+3}$$

Fare il grafico della funzione f, determinare $\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x)$, $\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x)$ e dire se la funzione ha massimo e/o minimo assoluto in $\mathbf{R}$.
Risposta:
Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1/2$$

Inoltre $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ e

$$f'(x) = -\frac{2(x^2+x-2)}{(2x^2-2x+3)^2}$$

e quindi $f'(x) = 0$ iff $x = -2$ o $x = 1$ e $f(-2) = \frac{6}{15}, f(1) = 1$.
Quindi f

$$\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \min_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \frac{6}{15}, \quad \sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbf{R}} f(x) = 1$$

Esercizio 2 (pt. 7.5)
Calcolare

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x + 3}\, dx$$

Risposta:
Facendo il cambiamento di variabili $y = \cos x$ si ottiene

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dy}{y^2-4y+3} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dy}{y-1} - \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{dy}{y-3} \\ &= \frac{1}{2}[\ln|\frac{y-1}{y-3}|]_0^{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{2}\ln(\frac{3(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}-3}) \end{aligned}$$

Esercizio 3(pt. 5)
Calcolare

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x+x^2) - \ln(1-x^2) - 2e^{x^3}}{xe^{\cos x}\mathrm{arctg} x^2}$$

Risposta: Per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^3))-(-x^2+o(x^3))-2(1+x^3+o(x^3))}{xe^{1+o(1)}(x^2+o(x^2))} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\frac{1}{2}x^2-x^3+o(x^3))-(-x^2+o(x^3))-2(1+x^3+o(x^3))}{x^3e(1+o(1))} \\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{4x^3(1+o(1))}{x^3e(1+o(1))} = -4/e \end{aligned}$$

Esercizio 4 (pt. 7.5)
Risolvere la seguente equazione differenziale del primo ordine

$$y' = e^y \ \sin x$$

con dato iniziale $y(0) = 0$
Risposta: L'equazione in esame e' una equazione differenziale a variabili separabili Integrando si ha

$$\frac{y'}{e^y} = \sin x$$

i.e.

$$-e^{-y(t)} + 1 = \int_0^t \sin x \ dx$$

e quindi

$$-e^{-y(t)} + 1 = -\cos t + 1$$

i.e.

$$y(t) = -\ln(\cos t)$$