PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1

(C.d.L. in Astronomia) – 8 febbraio 2017

1. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale generalizzato è convergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}(x-1)^\alpha}\, dx$$

2. Studiare la convergenza della seguente serie di funzioni, per $x \geq 0$ (ovvero per valori non negativi della variabile x):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2}$$

3. Determinare quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = x$, dove

$$f(x) = \arctan \frac{x+2}{x-3}$$

(Suggerimento: si tracci un grafico qualitativo della funzione $f(x)$.)

4. Determinare per quali valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ il limite sottoindicato esiste finito e calcolarlo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)\Big(1 - \ln(1+\frac{1}{x})^x\Big)}{3^x\,|x|^\beta}$$

5. Trovare le soluzioni complesse della seguente equazione, in forma algebrica:

$$z^4 + (1-2i)z^2 = 2i$$

SOLO PER GLI STUDENTI DEL PROF CUPINI:

Al posto dell'esercizio 2 svolgere il seguente esercizio:
Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, il seguente limite:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(n \sin^2 \left(\frac{3n^2}{n^3 + n^\alpha} \right) \right)^n .$$

Esercizio 1 (8/2/2017)

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}(x-1)^{\alpha}}\,dx \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\underline{x \to +\infty}$

$$\frac{1}{x^{2\alpha}(x-1)^{\alpha}} \sim \frac{1}{x^{2\alpha+\alpha}}$$

per il criterio del confronto asintotico l'integr. conv. per $3\alpha > 1$, i.e. $\alpha > \frac{1}{3}$

$\underline{x \to 1}$

$$\frac{1}{x^{2\alpha}(x-1)^{\alpha}} \sim \frac{1}{(x-1)^{\alpha}}$$

come sopra, conv. per $\alpha < 1$

In conclusione $\int_1^{+\infty} \dots \, dx$ converge per

$$\boxed{\frac{1}{3} < \alpha < 1}$$

Esercizio 2 (8/2/2017)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n^2} \qquad \underline{x \geq 0}$$

$\boxed{x=0}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ conv. per il criterio di Leibniz

$\boxed{x=\bar{x}>0}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\bar{x}+n^2}$ conv, e quindi si ha conv punt, infatti la succ.

$$\frac{1}{\bar{x}+n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \text{ in ma}_\text{e}$$

viene monot decres, quindi vale il criterio di Leibniz

conv. unif (vediamo la conv. totale):

$$\sup_{x\geq 0} \left| \frac{(-1)^n}{x+n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \qquad \text{e } \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv,}$$

quindi si ha conv. totale che implica conv uniforme, sull'insieme $\{x\in\mathbb{R};\ x\geq 0\}$.

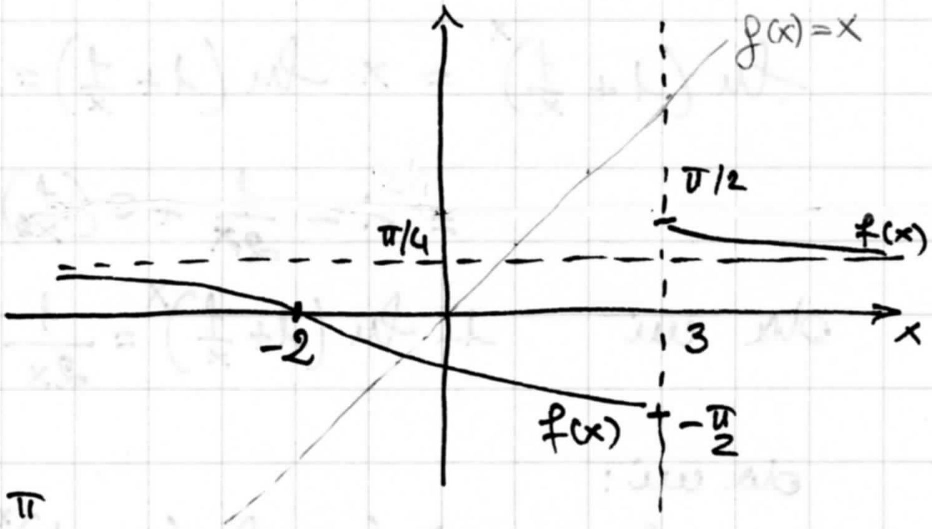
Esercizio 3 (8/2/2017)

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+2}{x-3}$$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

non ci sono parità

Noto che $f(x) = 0 \iff x = -2$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^2} \cdot \frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{\left[1+(\;)^2\right]\cdot(\;)^2}$$

per cui $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 3$

$\Rightarrow$ l'equaz. $f(x) = x$ ha 1 SOLA SOLUZIONE

Esercizio 4 (8/2/2017) $\beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)\left(1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{3^x |x|^\beta} =$$

$3^x \longrightarrow 0$ per $x \to -\infty$ per cui

$$\ln(1+3^x) = 3^x + o(3^x) = 3^x(1+o(1))$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

da cui $\quad 1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

da cui:

$$\frac{\ln(1+3^x)\left(1-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}{3^x |x|^\beta} =$$

$$= \frac{\cancel{3^x}(1+o(1))\left(\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\cancel{3^x}|x|^\beta} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{|x|^\beta}$$

Essendo $x \to -\infty$, quindi $x<0$, ho che $x = -|x|$ per cui

$$\frac{\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}{|x|^\beta} = \frac{-1}{2|x|^{\beta+1}} + o(\,) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \beta > -1 \\ -\frac{1}{2} & \beta = -1 \\ -\infty & \beta < -1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 5 (8/2/2017)

$$z^4 + (1-2i)z^2 = 2i$$

pongo $z^2 = u$ e ottengo

$$u^2 + (1-2i)u - 2i = 0$$

$$u = \frac{-(1-2i) \pm \sqrt{(1-2i)^2 + 8i}}{2} =$$

$(1-2i)^2 + 8i =$
$= (1+2i)^2$

$$= \frac{-(1-2i) \pm (1+2i)}{2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\cancel{-1}+2i\cancel{+1}+2i}{2} = \dfrac{4i}{2} = 2i \\ \dfrac{-1\cancel{+2i}-1\cancel{-2i}}{2} = -1 \end{cases}$$

$z^2 = 2i \qquad |2i| = 2 \qquad \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) =$
$\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = -(1+i)$

$z^2 = -1 \iff z = \pm i$

le 4 soluzioni sono quindi:

$+i,\ -i,\ 1+i,\ -(1+i)$