Lezione 12 - Il programma di Erlangen

Secondo il *programma di Erlangen* elaborato da Felix Klein a fine '800, le proprietà geometriche si classificano in base al gruppo di trasformazioni più ampio rispetto al quale sono *invarianti*. Una proprietà $\mathscr{P}$ è invariante rispetto ad un gruppo G di collineazioni del piano proiettivo $\wp^2(\mathbf{R})$ se per ogni sottoinsieme Σ di $\wp^2(\mathbf{R})$ che abbia la proprietà $\mathscr{P}$ e per ogni f∈G, anche il trasformato $f(\Sigma)$ ha la proprietà $\mathscr{P}$. Naturalmente, se H è un sottogruppo di G allora ogni proprietà $\mathscr{P}$ invariante rispetto a G lo è anche rispetto ad H. Inversamente, l'insieme di tutte le collineazioni rispetto alle quali una data proprietà $\mathscr{P}$ è invariante costituisce un sottogruppo di $\mathrm{Aut}\left(\wp^2(\mathbf{R})\right)$.

Il gruppo base è quello delle collineazioni (o proiettività), $\mathrm{Aut}\left(\wp^2(\mathbf{R})\right)$. Le proprietà invarianti rispetto a tale gruppo sono dette *proprietà proiettive*, e sono l'oggetto di studio della *Geometria Proiettiva*.

Sono esempi di proprietà proiettive: l'allineamento dei punti, il birapporto di quattro punti di una retta, il grado delle curve algebriche $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, la nozione di conica, il numero di intersezioni tra una curva algebrica ed una retta, la tangenza. Circa le coniche, ogni collineazione trasforma coniche degeneri in coniche degeneri dello stesso tipo e coniche non degeneri in coniche non degeneri. Infatti, data una conica $X^t \times A \times X = 0$ ed una collineazione $\lambda X = P \times Y$, con P non singolare e $\lambda \neq 0$, allora la trasformata è $Y^t \times \left(P^t \times A \times P\right) \times Y = 0$, e la sua matrice $P^t \times A \times P$ ha lo stesso rango di A.

Tra i sottogruppi notevoli del gruppo delle collineazioni c'è *il* gruppo delle affinità. In realtà, per ogni retta scelta come impropria c'è un sottogruppo delle affinità ad essa relativo. Tuttavia, se r ed s sono due rette proiettive, sappiamo che esiste una collineazione α che porta r in s. Allora il gruppo di affinità A_s relativo alla retta s è il *coniugato* $\alpha \circ A_r \circ \alpha^{-1}$ di A_r. Pertanto, i due sottogruppi A_r ed A_s sono isomorfi, non solo come gruppi astratti, ma come gruppi di permutazioni sui rispettivi piani affini. Allora parliamo di *gruppo delle affinità* al singolare. L'espressione analitica di un'affinità è $Y = M \times X + B$, dove M è una matrice d'ordine 2 non singolare e B è un vettore qualsiasi.

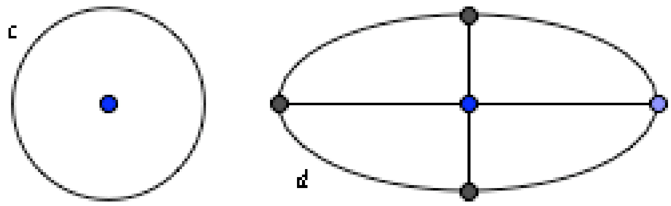
Rispetto a tale gruppo sono invarianti, oltre alle proprietà proiettive, anche il parallelismo e le nozioni di parallelogrammo, ellisse, iperbole e parabola. Inoltre, dati tre punti A, B, C su una retta, preso come ulteriore punto il punto improprio U della retta stessa, i quattro punti corrispondenti A', B', C', U' in un'affinità sono allineati, U' è improprio, e si ha $(U', A'; B', C') = (U, A; B, C)$. Tale numero si chiama *rapporto semplice* dei tre punti allineati A, B, C ed è invariante per affinità. In particolare, se la quaterna U, A, B, C è *armonica,* ossia se il birapporto vale -1, allora A è il punto medio di BC ed anche A' è il punto medio di B'C'. Dunque, il punto medio di un segmento è una proprietà affine. Dall'Analisi Matematica apprendiamo poi che dato un insieme L-misurabile di area s, il suo trasformato mediante l'affinità $Y = A \times X + B$ ha come area $s \cdot |\det(A)|$.

Il *gruppo delle similitudini è costituito* dalle affinità del tipo $Y = k \cdot P \times X + B$, dove P è una matrice *ortogonale* e k è un numero ≠ 0 detto *rapporto di similitudine*. Esse trasformano ogni triangolo ABC in un triangolo A'B'C' *simile* ad ABC, ed hanno dunque per invarianti gli angoli ed i rapporti fra i lati. Segmenti corrispondenti hanno lunghezze in rapporto $|k|$ tra loro, mentre aree di figure corrispondenti hanno rapporto $|\det(k \cdot M)| = k^2 \cdot |\det(M)| = k^2$. Se B = 0 e $M = I_2$ la similitudine si chiama *omotetia*. Se k = ±1, la similitudine si chiama *isometria*.

La geometria delle similitudini è quella di Euclide, e tratta le figure sulla base della loro forma e non delle loro dimensioni. Sono quindi nozioni eucidee: angolo retto, poligono regolare, rettangolo, rombo, circonferenza, eccentricità di una conica (che vedremo poi).

Rispetto a questo gruppo, tutte le parabole sono simili. Infatti, nella lezione 11 abbiamo visto che mediante trasformazioni ortogonali (ossia con isometrie) ogni parabola si riduce all'equazione $y_1{}^2 + 2\alpha_{02} \cdot y_2 = 0$. Ma anche la successiva trasformazione $\begin{cases} y_1 = -2\alpha_{02} \cdot x \\ y_2 = -2\alpha_{02} \cdot y \end{cases}$ è una omotetia, di rapporto $k = -2\alpha_{02}$, quindi ogni parabola è simile alla canonica $x^2 - y = 0$.

Non è così per le iperboli o le ellissi, come ci si può aspettare: la circonferenza *c* e l'ellisse *d* in figura hanno forme assai diverse:



Analogamente, iperboli con angoli diversi fra gli asintoti non sono simili. Se (vedi p. 56) in luogo dell'affinità $\begin{cases} y_1 = x/\sqrt{|\mu_1|} \\ y_2 = y/\sqrt{|\mu_2|} \end{cases}$ usiamo l'omotetia $\begin{cases} y_1 = x/\sqrt{|\mu_1|} \\ y_2 = y/\sqrt{|\mu_1|} \end{cases}$ arriviamo all'equazione $x^2 + h \cdot y^2 = \pm 1$, con h reale opportuno, che a seconda dei casi è un'ellisse, iperbole o ellisse immaginaria nella forma canonica *simile*. (Poi, un'affinità diagonale farà giungere alla forma canonica affine).

Il *gruppo delle isometrie del piano,* $Y = f(X) = P \times X + B$, con $P^{-1} = P^t$, ha come invariante la distanza di due punti. La geometria ad esso relativa è detta *Geometria Metrica* e figure corrispondenti sono dette classicamente *uguali* o, più modernamente, *congruenti* o, meglio ancora, *isometriche*. Un'isometria f è detta *movimento* se det(P) = 1, *isometria inversa* se det(P) = -1. Sia det(P) = 1: se $P = I_2$, f è una traslazione; se $P \neq I_2$, f è una *rotazione*. In particolare, se $P = -I_2$ allora f è una *simmetria centrale*. Sia det(P) = -1: f è una *simmetria assiale* se $f^2 = id$, altrimenti è un'*antitraslazione*.

isometria	**periodo**	**punti uniti**	**rette unite**
Identità	1	tutti	tutte
Traslazione di vettore B ≠ 0	infinito	nessuno	le // a *B*
Rotazione di centro O e ampiezza $\alpha \neq 0, \pi$	finito o no	O	nessuna
Simmetria centrale di centro O	2	O	le rette per O
Simmetria di asse s	2	i punti di s	s e le sue ⊥
Antitraslazione di asse s	infinito	nessuno	s

Lezione 13. Le coniche nel piano cartesiano

Dal punto di vista classico, le coniche sono introdotte come "luoghi geometrici". Una definizione di luogo geometrico, per altro, sui libri non è mai data in modo chiaro: quasi sempre è sinonimo di "sottoinsieme del piano euclideo". Potremmo limitare questa inutile generalità chiedendo che i punti del luogo soddisfino un'identità legata alla distanza da oggetti prefissati, ossia da punti, rette, coniche, ecc. Oppure, dire che un luogo geometrico è, sic et simpliciter, una curva algebrica, e così via.
Le coniche non degeneri sono ottenibili in molti modi come luoghi (qualunque cosa ciò voglia dire ...). Qui però abbiamo già classificato dal punto di vista affine le coniche, pertanto quelle che di solito, nei testi di geometria analitica o razionale sono definizioni, qui sono teoremi. Incominciamo con la parabola.

Teorema 13.1. a) Ogni parabola è il luogo geometrico di tutti i punti del piano equidistanti da un punto fisso F, detto *fuoco*, e da una retta d, chiamata *direttrice*, non passante per il fuoco.

b) Il grafico di una funzione polinomiale f:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f : x \mapsto a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, $a \neq 0$, è una parabola.

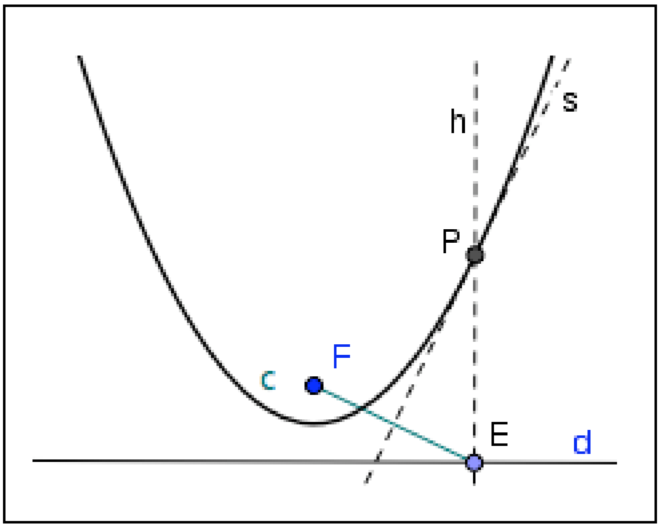
Dimostrazione. a) Mediante un cambio di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (corrispondente ad un'isometria), scegliamo come asse y la perpendicolare da F a d, come asse x l'asse del segmento FH, dove $H = d \cap y$. Posto $F = (0, p)$, p ≠ 0, la direttrice d ha equazione $y = -p$. Un punto P del luogo soddisfa la condizione $\overline{PF} = \overline{PE}$, dove E è il piede della perpendicolare da P a d. Posto $P = (x, y)$, si ha $E = (x, -p)$, quindi abbiamo l'equazione:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4\cdot p\cdot y$$

Posto ora $a = \frac{1}{4p}$, si ha l'equazione $a\cdot x^2 - y = 0$, con a ≠ 0, che è appunto una parabola. Inversamente, la parabola $a\cdot x^2 - y = 0$ è il luogo dei punti P equidistanti dal punto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e dalla retta di equazione $y = -\frac{1}{4a}$.

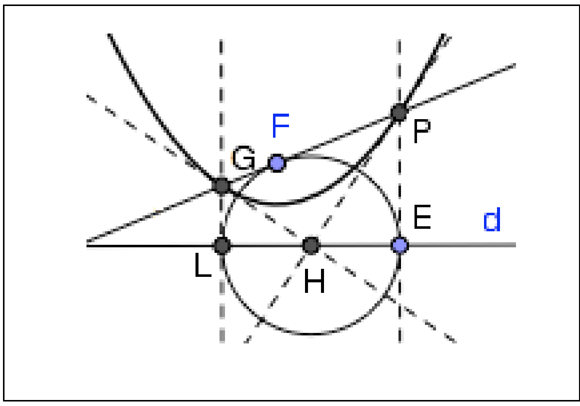
b) Poniamo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$: è l'equazione di una conica affine, che si potrebbe classificare con lo studio dei punti impropri e della matrice. Oppure, si può riscrivere così: $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$, ed allora una semplice traslazione la trasforma nell'equazione $a \cdot x^2 - y = 0$.

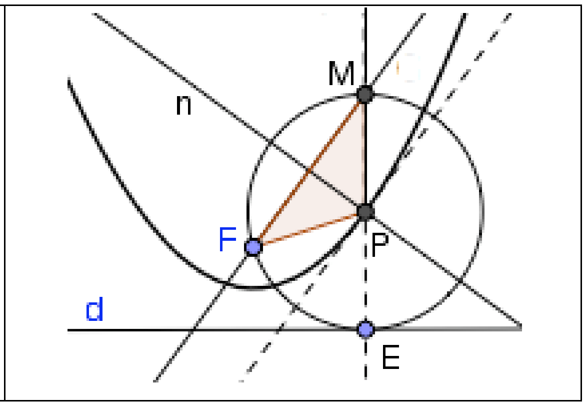
La parabola presenta un *asse di simmetria*. Infatti, ogni parabola è simile alla $a \cdot x^2 - y = 0$, che è il grafico della funzione *pari* $f(x) = a \cdot x^2$ e che dunque ha l'asse y come asse di simmetria. Il *vertice* V è il punto in cui l'asse di simmetria interseca la parabola. L'altra intersezione è il punto improprio della parabola (si veda la lezione 1).



La proprietà 13.1 a) fornisce un procedimento semplice per costruire una parabola mediante i diffusi software di geometria dinamica: si fissino un punto F come fuoco ed una retta d come direttrice. Su questa si prenda un punto E, si innalzi la perpendicolare h da E a d e la si intersechi con l'asse s del segmento EF: al variare di E sulla direttrice, il punto $P = h \cap s$, equidistante da F e da d, descrive la parabola. Si osservi che la retta s è tangente in P alla parabola (esercizio).

Si osservi che la direttrice è la polare del fuoco. Posto infatti, in coordinate omogenee, $F = [4a, 0, 1]$, scritta l'equazione della parabola nella forma $2a \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x_2 = 0$ (il fattore 2 è per comodità), la polare di F è $F \times A \times X = 0$, dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Svolgendo i calcoli si ottiene $-x_0 - 4 \cdot a \cdot x_2 = 0$, da cui segue appunto $y = -\frac{1}{4a}$. Come corollario segue allora che se da un punto H della direttrice conduciamo le tangenti alla parabola, la retta PG che congiunge i due punti di tangenza P e G passa per il fuoco. Inoltre, detti E ed L i piedi delle perpendicolari a d condotte da P e G, si ha $\overline{HL} = \overline{HE} = \overline{HF}$ (esercizio).

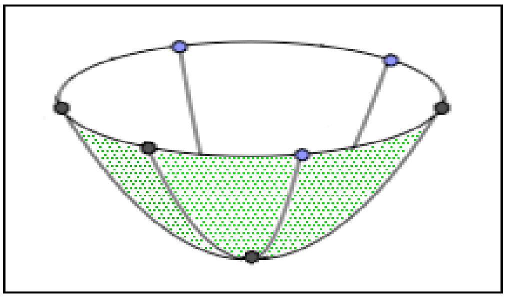




Proposizione 13.2. I raggi di luce emessi da una sorgente luminosa posta sul fuoco di una parabola, rimbalzando sulla parabola stessa diventano paralleli all'asse. Inversamente, raggi paralleli all'asse sono riflessi nel fuoco.

Dimostrazione. Sia data la parabola $a \cdot x^2 - y = 0$, $a > 0$, e sia F il suo fuoco. Il punto generico P abbia coordinate $\left(t, a \cdot t^2\right)$. Dobbiamo dimostrare che la retta FP e la retta x = t, parallela all'asse di simmetria, sono simmetriche rispetto alla perpendicolare n in P alla tangente in P. Per farlo, sia E il punto della direttice di ascissa t. Allora $\overline{FP} = \overline{PE} = a \cdot t^2 + \frac{1}{4a}$. Sulla retta x = t consideriamo il punto M simmetrico di E rispetto a P: allora $\overline{PM} = \overline{PE} = a \cdot t^2 + \frac{1}{4a}$, quindi $M = \left(t,\ 2a \cdot t^2 + \frac{1}{4a}\right)$ ed inoltre $\overline{PM} = \overline{PF}$. Ne segue che il triangolo FPM è isoscele e la sua altezza relativa al lato FM è bisettrice dell'angolo $F\hat{P}M$. Se dimostriamo che la retta FM è parallela alla tangente in P, siamo a posto. Poiché $F = \left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$, la retta FM ha coefficiente angolare $\frac{2a \cdot t^2 + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4a}}{t - 0} = 2at$, come la tangente in P.

Questa proprietà è all'origine delle applicazioni tecnologiche della parabola. Si consideri infatti il solido ottenuto ruotando la parabola $a \cdot x^2 - y = 0$ intorno al suo asse di simmetria. Si ottiene la superficie di equazione $a \cdot \left(x^2 + z^2\right) - y = 0$, detta *paraboloide (ellittico) di rotazione*. Tutti i piani passanti per l'asse intersecano il paraboloide in parabole con lo stesso fuoco, detto *fuoco* del paraboloide. Uno specchio o un'antenna parabolica sono ottenute tagliando un paraboloide di rotazione con un piano perpendicolare all'asse. Una sorgente



puntiforme posta nel fuoco fornisce raggi che, riflessi dalle pareti interne, escono paralleli all'asse del paraboloide. Inversamente, raggi luminosi o onde radio provenienti da una sorgente posta nella direzione dell'asse e sufficientemente lontana da poter essere considerati paralleli, sono riflessi e catturati da un ricevitore posto nel fuoco.

Ricordiamo infine, come ci insegna la Meccanica, che la traiettoria di un proiettile, in assenza di attriti, è un arco di parabola.

Vediamo ora il caso delle **coniche a centro.** Abbiamo visto nel capitolo sulle coniche affini che con una trasformazione ortogonale ed una traslazione, l'equazione diventa: $\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 + \dfrac{\det(A)}{A_{00}} = 0$. Ossia, con una isometria, a partire dall'equazione generale di una conica affine, prendendo come nuova origine il centro e come assi le rette corrispondenti agli autovettori della sottomatrice dei coefficienti dei termini di secondo grado (il cui determinante è $A_{00} \neq 0$), si ottiene l'equazione sopra scritta. Se i due autovalori λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno, allora il loro prodotto A_{00} è positivo e l'essere la conica una ellisse reale o immaginaria dipende dalla concordanza del loro segno col segno di det(A). Nel caso dell'ellisse reale, i segni sono discordi, quindi i numeri $\dfrac{\det(A)}{A_{00} \cdot \lambda_i}$, $i = 1,2$, sono negativi. Poniamo: $a = \sqrt{\dfrac{-\det(A)}{A_{00} \cdot \lambda_1}}$, $b = \sqrt{\dfrac{-\det(A)}{A_{00} \cdot \lambda_2}}$. Allora l'equazione dell'ellisse reale diventa: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, e questa è detta equazione canonica dell'ellisse.

Per l'ellisse immaginario abbiamo concordanza di segno tra autovalori e det(A).

Posto $a=\sqrt{\frac{\det(A)}{A_{00}\cdot\lambda_1}}$, $b=\sqrt{\frac{\det(A)}{A_{00}\cdot\lambda_2}}$, l'equazione canonica è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$.

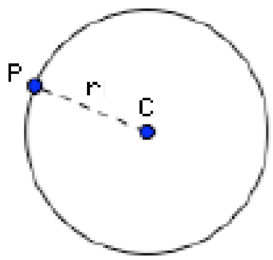
Infine, per l'iperbole, i segni degli autovalori sono opposti, il loro prodotto A_{00} è negativo. Allora, posto $a=\sqrt{\left|\frac{\det(A)}{A_{00}\cdot\lambda_1}\right|}$, $b=\sqrt{\left|\frac{\det(A)}{A_{00}\cdot\lambda_2}\right|}$, a meno di scambi di nome tra gli assi (con la simmetria assiale rispetto alla retta y = x), si ottiene l'equazione canonica delle iperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ogni conica non degenere è isometrica dunque ad una di quelle rappresentate dalle equazioni canoniche sopra ottenute.

I numeri positivi a e b prendono il nome di *semiassi*. Dal fatto che x ed y siano solo al quadrato, segue che gli assi cartesiani sono assi di simmetria per queste coniche, ossia, **ogni conica a centro ha due assi di simmetria ortogonali fra loro.** Le intersezioni con tali assi si chiamano *vertici*.

L'ellisse immaginaria non ha punti nel piano cartesiano reale e la tralasciamo nel seguito. Vedremo quindi i casi dell'ellisse e dell'iperbole.

Incominciamo dall'ellisse, o meglio, da un suo caso particolare.



Se $a=b=r$ l'equazione diventa $x^2+y^2=r^2$ ed è una *circonferenza* di centro $O=(0,0)$ e *raggio* r. Essa è il luogo dei punti che hanno dal centro distanza uguale al raggio. Più in generale, posto $C=(x_0,y_0)$, preso un numero $r>0$, l'equazione della circonferenza di centro C e raggio r è $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

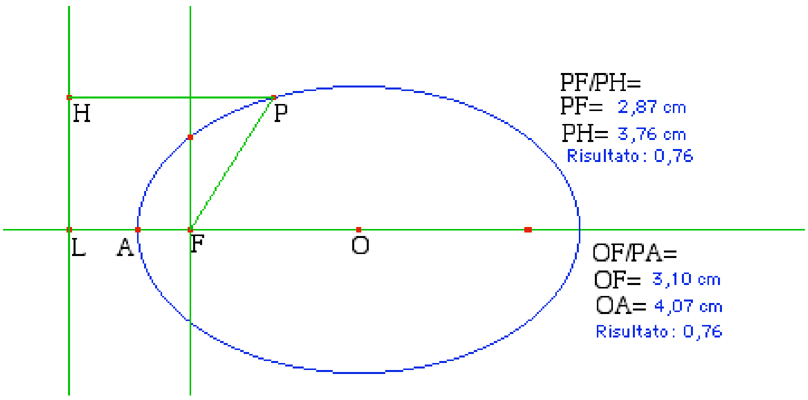
Svolgendo i calcoli, posto $\begin{cases}\alpha=-2\cdot x_0\\ \beta=-2\cdot y_0\\ \gamma=x_0{}^2+y_0{}^2-r^2\end{cases}$, le circonferenze hanno equazione

$x^2 + y^2 + \alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma = 0$, ma non ogni equazione di questo tipo è una circonferenza. Infatti, una conica con questo tipo di equazione potrebbe non avere punti reali o essere degenere. Avremo una circonferenza se e solo se $\gamma - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} > 0$, perché il raggio è la radice quadrata di questo numero.

Le innumerevoli proprietà della circonferenza sono ben note e non sono qui riportate. Notiamo solo che ogni diametro è asse di simmetria e che i suoi punti impropri, immaginari, sono detti *punti ciclici* del piano, $(0, 1, \pm i)$ e per essi passano tutte le circonferenze.

Inoltre, ogni punto della circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ si può rappresentare nella forma *polare* $\begin{cases} x = a \cdot \cos(\theta) \\ y = a \cdot \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

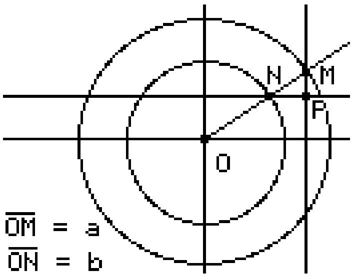
Torniamo ora all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Con semplici considerazioni si rileva che è contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni $x = \pm a$, $y = \pm b$. I punti di coordinate (±a, 0) e (0, ±b) appartengono all'ellisse e rappresentano i suoi vertici. Se a > b, la forma dell'ellisse è la seguente:

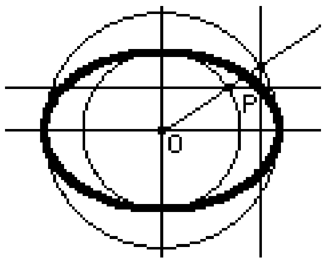


Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ i punti di coordinate (±c; 0) sono detti *fuochi* dell'ellisse e il numero $\varepsilon = c/a$ è la sua *eccentricità*. Si ha sempre $0 \le \varepsilon < 1$. Se l'ellisse è una circonferenza, i fuochi coincidono tra loro e con il centro, e si ha $\varepsilon = 0$.

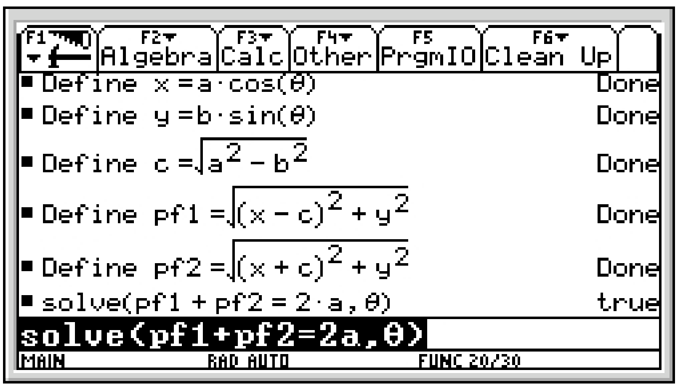
Se $\varepsilon \ne 0$ le due rette di equazioni $x = \pm a/\varepsilon$ sono dette *direttrici* dell'ellisse, e sono le polari dei fuochi. Una proprietà su cui torneremo è che per ogni punto dell'ellisse il rapporto delle distanze dal fuoco e dalla direttrice è costante ed uguale all'eccentricità.

Ogni punto dell'ellisse si rappresenta in forma polare nel modo seguente: $\begin{cases} x = a\cdot\cos(\theta) \\ y = b\cdot \mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Ciò suggerisce la seguente costruzione: si considerino le due circonferenze di centro l'origine e raggi a e b. Sia M un punto della circonferenza maggiore. Il raggio OM incontra la circonferenza interna in un punto N. Si conducano da M la perpendicolare all'asse x, da N la perpendicolare all'asse y; il punto P di intersezione, al variare del punto M, descrive l'ellisse.





Teorema 13.3. L'ellisse è il luogo dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti distinti fissati.



Dimostrazione. I punti P dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sono tutti e solo i punti del piano tali che, detti F_1 e F_2 i fuochi, si ha $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$. Infatti, basta esprimere le coordinate di P in forma polare, ricordare che $c=\sqrt{a^2-b^2}$, poi calcolare le distanze di P dai due fuochi, risolvere l'equazione $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ rispetto a θ, e si può fare anche con un software matematico: la risposta è "true", ossia è un'identità.

Inversamente, siano dati due punti, che chiameremo F_1 e F_2, un numero positivo, che denoteremo con 2a. Cerchiamo i punti P tali che $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$. Fissiamo come asse y l'asse del segmento F_1F_2, mentre come asse x scegliamo la retta F_1F_2. Posto $F_1 = (c, 0)$, $c > 0$, allora $F_2 = (-c, 0)$ e deve essere $c < a$, per le proprietà dei lati del triangolo PF_1F_2 (ogni lato è minore della somma degli altri due). Pertanto, quando servirà, potremo porre $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ e ricavarne $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Sia $P = (x, y)$. Calcoliamo le distanze e esplicitiamo $\overline{PF_1}$: i passaggi sono ben noti e si possono eseguire anche con del software. L'unica cautela si deve avere nell'elevare al quadrato.

- Define $pf1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ — Done
- Define $pf2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ — Done
- $pf1 = 2 \cdot a - pf2$

  $\sqrt{x^2 - 2 \cdot c \cdot x + y^2 + c^2} = 2 \cdot a - \sqrt{x^2 + 2 \cdot c \cdot x + y^2 + c^2}$

  Eleviamo al quadrato:
- $x^2 - 2 \cdot c \cdot x + y^2 + c^2 =$

  $= -4 \cdot a \cdot \sqrt{x^2 + 2 \cdot c \cdot x + y^2 + c^2} + x^2 + 2 \cdot c \cdot x + y^2 + 4 \cdot a^2 + c^2$

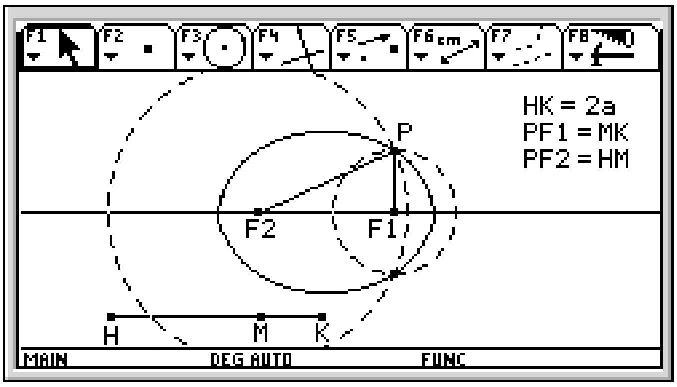
  Isoliamo il radicale:
- $c \cdot x + a^2 = a \cdot \sqrt{x^2 + 2 \cdot c \cdot x + y^2 + c^2}$

  Eleviamo al quadrato e semplifichiamo:
- $c^2 \cdot x^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot x + a^4 = a^2 \cdot x^2 + 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot x + a^2 \cdot y^2 + a^2 \cdot c^2$
- $a^4 - a^2 \cdot c^2 = (a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2$

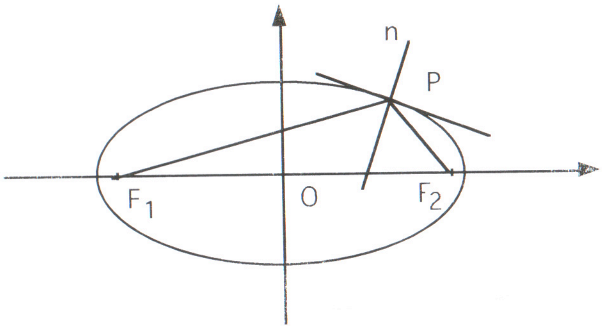
  Sostituiamo:
- Define $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — Done
- $a^4 - a^2 \cdot c^2 = (a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2$ — $a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2$

  Dividiamo per il termine noto:
- $\dfrac{a^2 \cdot b^2 = b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2}$ — $1 = \dfrac{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2}$
- $\text{expand}\left(1 = \dfrac{b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2}{a^2 \cdot b^2}\right)$ — $1 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

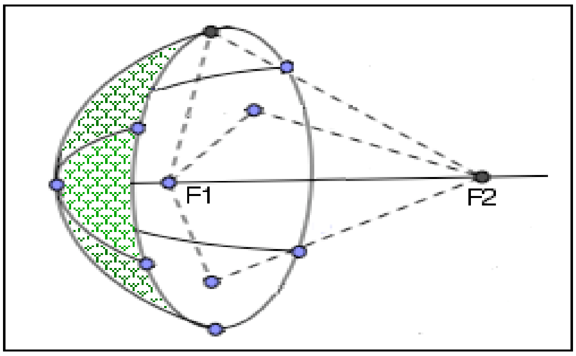
I passaggi alla fine sono tutti leciti, in quanto abbiamo già verificato che ogni punto dell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ soddisfa la condizione $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$.



La costruzione dell'ellisse che fa uso di questa proprietà è detta "del giardiniere": si conficcano due pioli nel terreno a distanza 2c, ad essi si legano i capi di una corda di lunghezza 2a > 2c e con un bastone appuntito fatto scorrere sulla corda tenuta tesa è tracciata un'aiola a forma di ellisse. Non è agevole realizzarla con i software di geometria dinamica, perché il luogo non si chiude in corrispondenza dei vertici sulla retta dei fuochi. La figura seguente è stata “aggiustata” con un programma di disegno.



Un’importante proprietà fisica dell’ellisse è la seguente: sia P un suo punto, sia r la retta tangente all’ellisse in P e sia n la perpendicolare in P a tale tangente. Allora n è la bisettrice dell’angolo formato dalle semirette PF_1 e PF_2. Pertanto un segnale che parta da F_1 e diretto verso P, dopo aver rimbalzato sull’ellisse passa per F_2. Non si riporta la dimostrazione di questo fatto. Si noti che, come conseguenza, ogni segnale emesso da una sorgente posta in un fuoco viene riflesso verso l’altro fuoco. Ciò si mantiene anche in un *ellissoide di rotazione*, in cui tutte le ellissi ottenute sezionandolo con un piano passante per l’asse di rotazione hanno gli stessi fuochi: i raggi emessi da una sorgente posta in un fuoco di uno specchio di questo tipo si concentrano nell’altro fuoco. Possibili applicazioni si possono avere nella radioterapia.

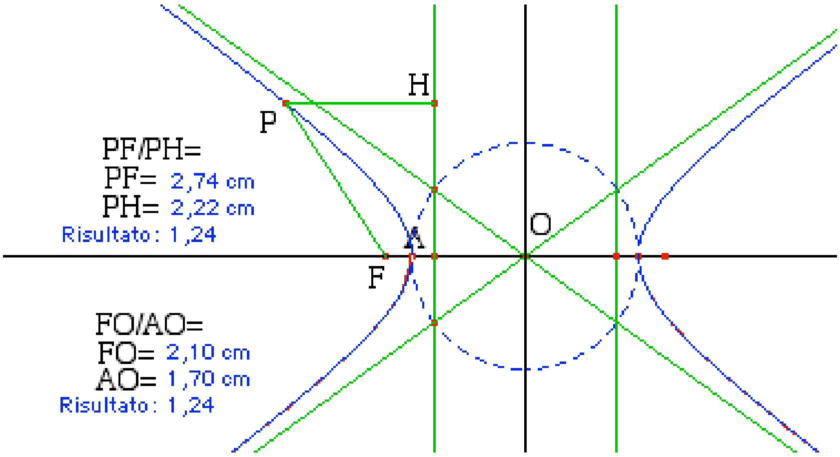


Una situazione ben nota in cui compaiono delle ellissi si trova in astronomia: l’orbita di ogni pianeta è una ellisse di bassa eccentricità ed il sole occupa uno dei fuochi. Questo è il contenuto della prima legge di Keplero, trovata mediante lunghe osservazioni, ma ricavabile come conseguenza della legge di gravitazione universale di Newton.

In architettura, volte o piante a sezioni ellittiche si trovano talora in edifici antichi. In particolare, dove s’incontrano due volte semicilindriche ortogonali, si hanno costoloni ellittici. Un esempio è l’incrocio dei due voltoni sotto il palazzo Re Enzo a Bologna, dove, bisbigliando in un angolo, la voce si sente distintamente nell’angolo opposto. In pittura è poi nota l’ellisse barocca, formata dalle teste dei personaggi ed usata per dare dinamismo alle scene.

Dall’Analisi Matematica sappiamo che l’area della parte di piano costituita dai punti interni all’ellisse di semiassi a e b è data da $\pi \cdot a \cdot b$. Il calcolo coinvolge integrazioni per sostituzione e per parti, ed è un ottimo esercizio sugli integrali.

Considerazioni simili si possono fare per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Come nel caso dell'ellisse, si vede che è simmetrica rispetto all'origine e rispetto ai due assi coordinati. L'asse di simmetria y = 0 incontra la curva nei punti (±a, 0), che si chiamano *vertici* dell'iperbole. Invece l'altro asse, di equazione x = 0, non incontra l'iperbole. Si ha poi che nessun punto P(x, y) per cui si abbia $|x| < a$ appartiene all'iperbole, che è dunque contenuta nei due semipiani definiti dalle condizioni $x \leq -a$ e $x \geq a$. Pertanto la curva si spezza in due rami simmetrici rispetto agli assi ed esterni alla striscia compresa fra le rette x = ±a. Per la y non ci sono limitazioni.



Intersecando ora l'iperbole con le rette per l'origine y = m·x, con $m \in \mathbf{R}$, si ottiene l'equazione $(b^2-m^2a^2)x^2 = a^2b^2$; poiché il secondo membro è positivo, essa ha soluzione se e solo se $b^2-m^2a^2 > 0$; ciò si verifica se $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$.

Le due rette limite y = ±bx/a sono gli *asintoti* dell'iperbole.

L'iperbole è contenuta nei due angoli opposti al vertice aventi gli asintoti per lati e per bisettrice l'asse x. L'iperbole non interseca mai gli asintoti, ma si avvicina ad essi a piacere man mano che cresce $|x|$.

Posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ i punti di coordinate (±c; 0) sono detti *fuochi* dell'iperbole e il numero ε = c/a è la sua *eccentricità* ed è sempre > 1.

Se a = b l'iperbole si dice *equilatera*. In tal caso, gli asintoti sono le bisettrici dei quattro quadranti (y = ±x), sono perpendicolari fra loro e si ha $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Le rette di equazioni x = ±a/ε sono dette *direttrici* dell'iperbole, sono le polari dei fuochi e sono contenute all'interno della striscia delimitata dalle rette x= ±a.

Siano ora F un fuoco, A il vertice più vicino, O il centro dell'iperbole. La polare di F è la direttrice più vicina, e si costruisce come nel caso generale. La circonferenza di centro O e raggio OA interseca le direttrici in punti appartenenti agli asintoti. Il rapporto delle distanze $\overline{PF}/\overline{PH}$ di un punto qualunque P dell'iperbole da F e dalla sua direttrice uguaglia il rapporto $\overline{OF}/\overline{OA} = c/a = \varepsilon$.

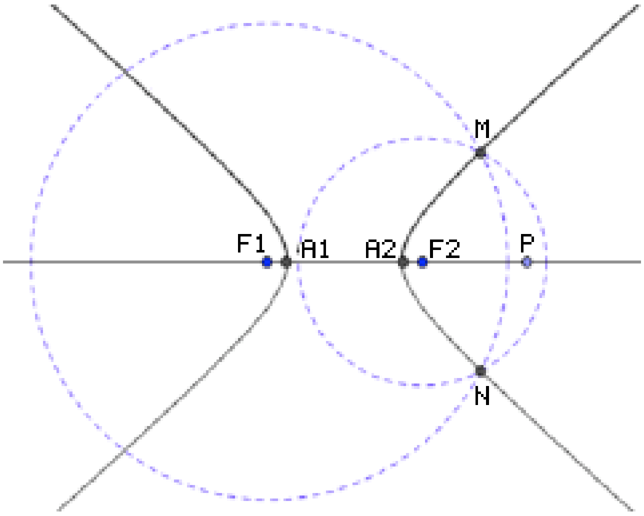
Teorema 13.4. L'iperbole è il luogo dei punti del piano tali che il modulo della differenza delle distanze da due punti fissi distinti rimane costante.

Dimostrazione. Siano $F_1 = (c, 0)$ ed $F_2 = (-c, 0)$, $c > 0$, i due *fuochi* e $P = (x, y)$ il punto generico del piano, verificante la condizione: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$, con $a > 0$. Considerato il triangolo PF_1F_2, poiché $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| < \overline{F_1F_2}$, si ha: $2a < 2c$, cioè $a < c$. La condizione iniziale si esprime analiticamente con l'equazione $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$, da cui quadrando e semplificando, dopo aver posto la condizione di esistenza dell'equazione: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \geq 0$, si ottiene: $a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Se si eleva di nuovo al quadrato, si ottiene $\left(c^2 - a^2\right) \cdot x^2 - a^2y^2 = a^2 \cdot \left(c^2 - a^2\right)$. Essendo $a < c$, cioè $c^2 - a^2 > 0$, si può porre $c^2 - a^2 = b^2$ e l'equazione del luogo geometrico diviene $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$; dividendo per a si ottiene $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, che è l'equazione canonica dell'iperbole avente i fuochi sull'asse delle ascisse. Inversamente, ogni punto P dell'iperbole soddisfa la condizione $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$, perché soddisfa tutte le condizioni poste.

Per costruire un'iperbole, siano dati l'asse traverso A_1A_2 ed i fuochi F_1 ed F_2. Preso un punto qualunque P sulla retta r passante per i fuochi, esterno alla distanza focale, si traccino la circonferenza di centro in F_2 e raggio PA_2 e quella di centro F_1 e raggio PA_1. I punti M, N d'intersezione sono punti dell'iperbole. Infatti, per il punto M si ha:

$$\overline{MF_1} - \overline{MF_2} = \overline{PA_1} - \overline{PA_2} = \overline{A_1A_2}.$$

Lo stesso per il punto N. Per l'altro ramo si procede per simmetria. Come per l'ellisse, questa costruzione eseguita con i software di geometria dinamica, non si chiude nei vertici ed occorrono manipolazioni per ottenere belle figure.



Ruotiamo ora un'iperbole intorno ad uno dei suoi assi: se l'asse è quello dei fuochi, si ottiene *l'iperboloide di rotazione ellittico*, a due *falde*, mentre se la ruotiamo intorno all'altro asse otteniamo un *iperboloide di rotazione iperbolico*, ad una *falda*, tale che per ogni suo punto passano due rette interamente giacenti sull'iperboloide.

Nota. Se ruotiamo un'ellisse intorno ad uno qualunque dei suoi due assi di simmetria otteniamo un *ellissoide* di rotazione. Il pallone da calcio (sferico), quello da rugby o il disco lanciato in atletica sono ellissoidi di rotazione. Se ruotiamo una parabola intorno al suo asse di simmetria otteniamo un *paraboloide* di rotazione, che abbiamo visto essere usato nelle antenne e negli specchi parabolici, ed è un caso particolare di una quadrica *detta paraboloide ellittico*. Esiste però un'ulteriore quadrica affine non degenere, ma che non è mai di rotazione: è il *paraboloide iperbolico*, a forma di sella. Su svariati siti Internet è possibile vedere la forma delle quadriche affini non degeneri.

Abbiamo visto che ellissi, iperboli e parabole possiedono fuochi e direttrici con la proprietà che per ogni loro punto il rapporto delle distanze da un fuoco e dalla sua direttice è costante. Vogliamo approfondire la questione.

Teorema 13.5. Siano $\varepsilon > 0$, F un punto e d una retta non passante per F. Il luogo dei punti P tali che $\overline{PF} = \varepsilon \cdot \overline{PH}$ (dove $\overline{PH}$ è la distanza di P dalla retta d) è una conica non degenere. Più precisamente, si ha:

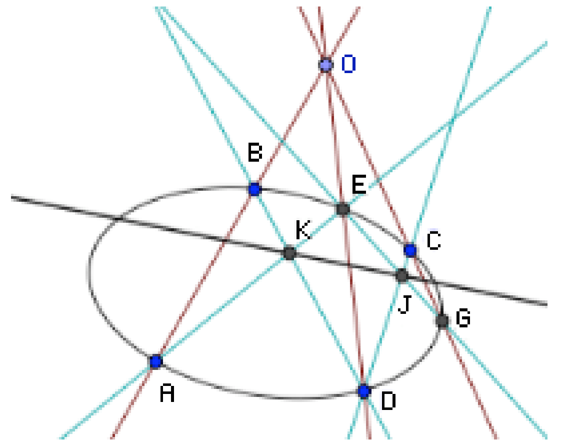
- Se $0 < \varepsilon < 1$ la curva è un'ellisse.
- Se $\varepsilon = 1$ la curva è una parabola.
- Se $\varepsilon > 1$ la curva è un'iperbole.

Dimostrazione. Possiamo porre F = (h, 0), h > 0, e scegliere come d l'asse y. Allora $\overline{PF} = \sqrt{(x-h)^2 + y^2}$, mentre la distanza di P da d è $|x|$. Allora P soddisfa l'equazione $\sqrt{(x-h)^2 + y^2} = \varepsilon \cdot |x|$. Eleviamo al quadrato e portiamo tutto al primo membro: $\left(1-\varepsilon^2\right) \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot h \cdot x + h^2 = 0$. Si ottiene una conica non degenere, che a seconda del valore di ε, è un'ellisse, un'iperbole o una parabola. Si noti che, rispetto alla conica ottenuta, la direttrice è la polare del fuoco.

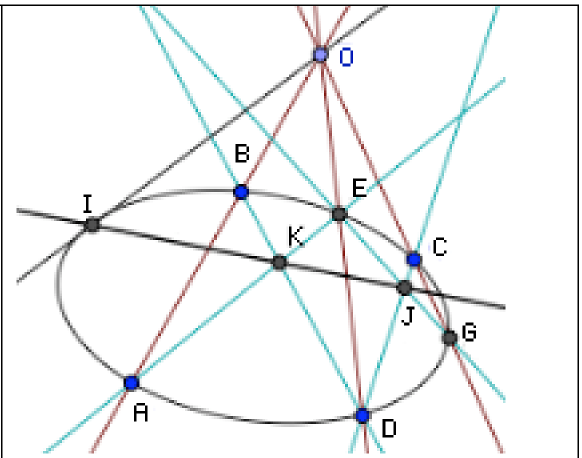
NOTE. a) Per $\varepsilon = 0$ si ha l'equazione di una circonferenza, ma questa costruzione non è in grado di definire le circonferenze, perché $\overline{PF} = \varepsilon \cdot \overline{PH} = 0$ implicherebbe P = F ed in questo caso la conica si trasformerebbe in un punto. Il fatto è che in una circonferenza i fuochi coincidono col centro, e la polare del centro è la retta impropria. Quindi, il caso della circonferenza va trattato a parte, come caso limite dell'ellisse.
b) La costruzione di una conica per 5 punti scelti a caso non dà mai né una parabola né una circonferenza, dato che la circonferenza e la parabola hanno eccentricità rispettivamente 0 ed 1, mentre ellisse generica ed iperbole hanno infinite possibilità. Allo stesso modo, non vengono coniche degeneri, perché tre punti a caso dovrebbero essere allineati. Per ottenere una parabola conviene costruirla come luogo, prendere su di essa cinque punti e poi generare la conica per essi. Oppure, fissare tre punti e la direzione dell'asse, costruire altri due punti e poi la conica per essi.

14. Appendice 1: alcune costruzioni sulle coniche

Sia data nel seguito una conica non degenere. Le costruzioni seguenti sono basate su proprietà proiettive o affini, a seconda dei casi. Le costruzioni successive spesso sono basate sulle precedenti. Le costruzioni base (asse di un segmento, rette perpendicolari o parallele, punto medio, simmetrica di una retta rispetto ad un punto o ad una retta) sono date per note.

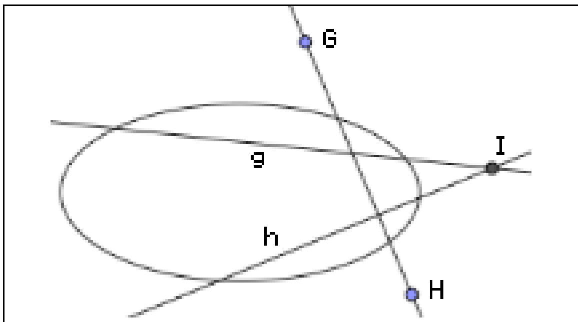


14.1. Costruzione della polare di un punto esterno O. Tracciate per O tre secanti AB, ED, CG, posto K = BD∩AE, J = EG∩CD, la polare di O è la retta KJ.

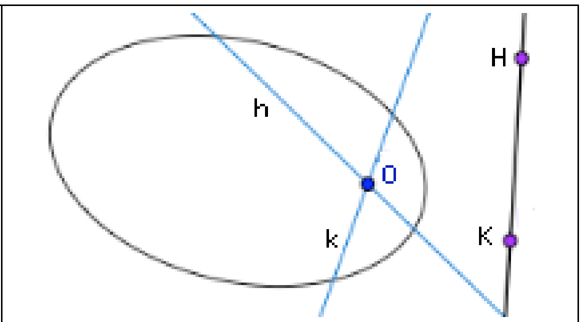


14.2. Le tangenti da un punto esterno O. Tracciata la polare, detto I un punto intersezione della polare con la conica, la retta OI è tangente alla conica.

Nota. Le costruzioni precedenti non funzionano nel caso affine in cui O sia il centro di una iperbole.

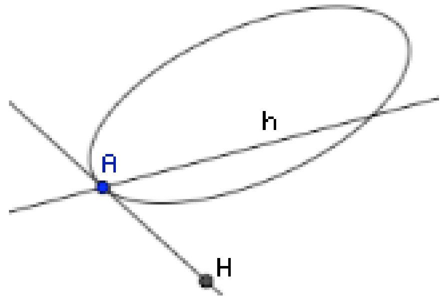


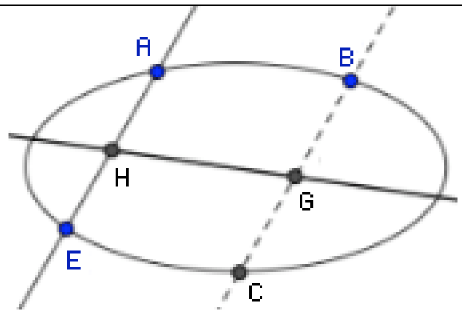
14.3. Polo di una retta. Presi sulla retta due punti G, H esterni alla conica, se ne determinino le polari. La loro intersezione è il polo I cercato.



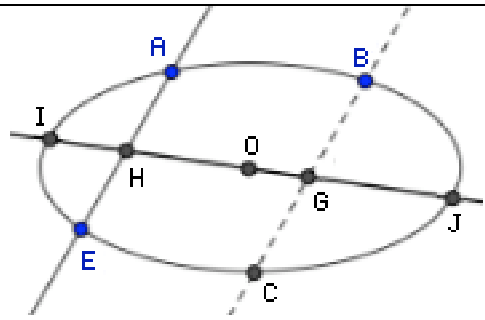
14.4. Polare di un punto interno O. Si tracciano due rette h, k per O, se ne determinano i poli H, K. La retta HK è la polare cercata.

14.5. La tangente in un punto A della conica. Si tracci una retta per A, se ne determini il polo H e si congiunga H con A.



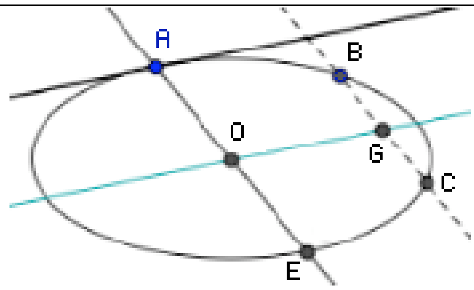


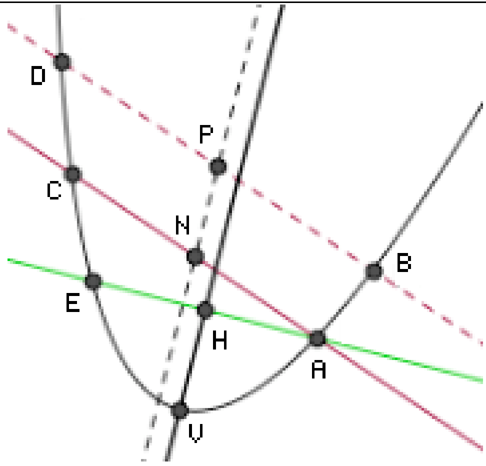
14.6. Il diametro coniugato ad una direzione rispetto a una conica affine a centro. Dati due punti A, E della conica, il diametro coniugato alla direzione AE si trova conducendo da un punto B della conica la corda BC parallela ad AE e congiungendo i punti medi H e G delle due corde AE e BF.



14.7. Il centro. Dati due punti distinti A, E, si trovi il diametro coniugato ad AE, se ne trovino le intersezioni I, J con la conica: il centro è il punto medio O della corda IJ.

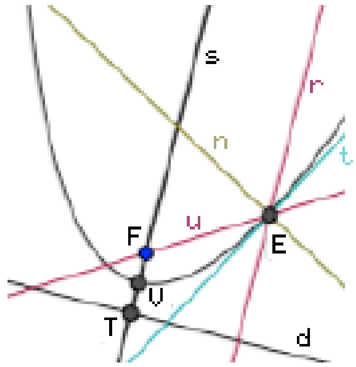
14.8. La tangente in un punto A di una conica a centro. Si costruiscano il centro O, ed il diametro OG coniugato ad AO. La tangente in A è la parallela per A ad OG. (Costruzione alternativa a 14.5).

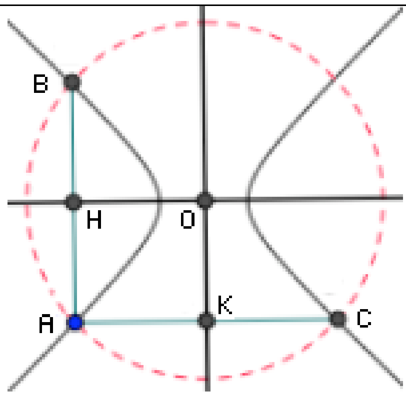




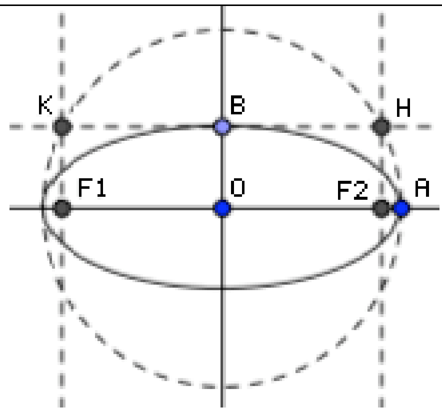
14.9. Asse e vertice di una parabola. Siano A, B, C tre punti della parabola. Sia BD la corda parallela ad AC e siano P, N i punti medi di BD ed AC. La retta PN è un diametro, quindi passa per il "centro" improprio ed è parallela all'asse. La perpendicolare da A a PN determina la corda AE, il cui punto medio H è sull'asse. La parallela per H alla PN è l'asse e l'intersezione V dell'asse con la parabola è il vertice.

14.10. Fuoco e direttrice di una parabola. Costruiti l'asse s ed il vertice V, dal punto E si traccino la parallela r all'asse, la tangente t e la perpendicolare n alla tangente. Sia u la *simmetrica* di r rispetto ad n: allora F = u∩s è il fuoco. La direttrice è la sua polare, o anche, detto T il simmetrico di F rispetto a V, è la perpendicolare per T all'asse.





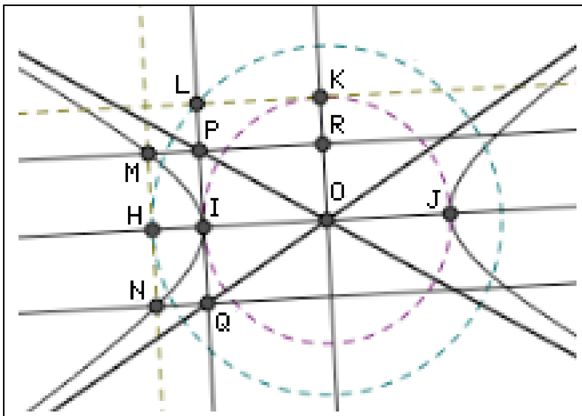
14.11. Assi e vertici di una conica a centro. Siano O il centro ed A un punto della conica. Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OA. Le intersezioni con la conica sono vertici di un rettangolo i cui assi dei lati sono gli assi della conica. I vertici sono le intersezioni degli assi con la conica.



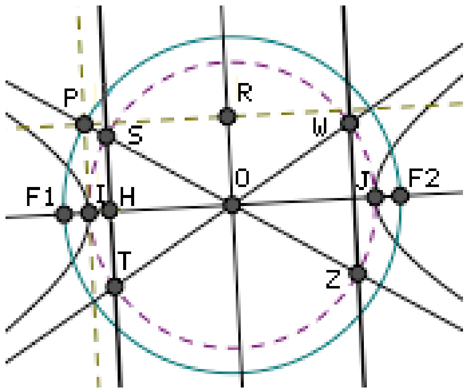
14.12. Fuochi di un'ellisse, dati gli assi. Siano OA e OB i due semiassi. La circonferenza di centro O e raggio OA intersechi in H e K la parallela per B all'asse OA. Le parallele per H e K all'asse OB intersecano OA nei fuochi F1 ed F2.

Nota. Ricordo che le direttrici sono le polari dei fuochi rispetto alla conica.

14.13. Semiasse traverso ed asintoti di un'iperbole. Ricordiamo che per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ i punti di ordinata b hanno ascissa $\pm a\sqrt{2}$. Ciò posto, detti I e J i due vertici ed O il centro, allora $a = \overline{OI}$. La circonferenza col centro in O e raggio a incontri l'asse trasverso in K. Le parallele agli assi per K ed I si incontrino in L: allora $\overline{OL} = \overline{OI}\cdot\sqrt{2} = a\cdot\sqrt{2}$. La circonferenza di centro O e raggio $\overline{OL}$ incontri l'asse IJ in H; la perpendicolare per H all'asse IJ incontri l'iperbole in N ed M; allora $\overline{HM} = \overline{HN}$ è la lunghezza b del semiasse trasverso. Le parallele per M ed N all'asse IJ intersechino LI in P e Q rispettivamente. Le rette OP e OQ sono gli asintoti. L'intersezione R di MP con l'asse trasverso è tale che $\overline{OR} = b$.



Semiasse trasverso e asintoti dell'iperbole

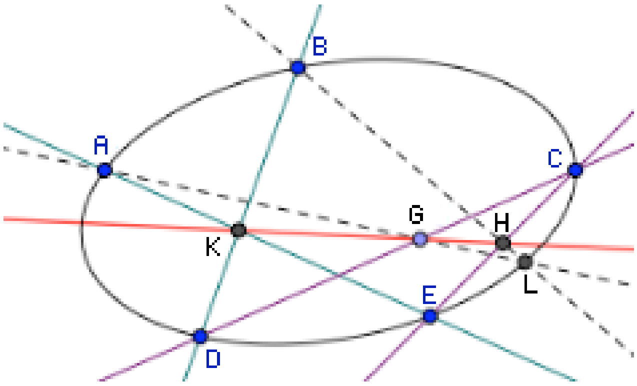


Fuochi e direttrici dell'iperbole

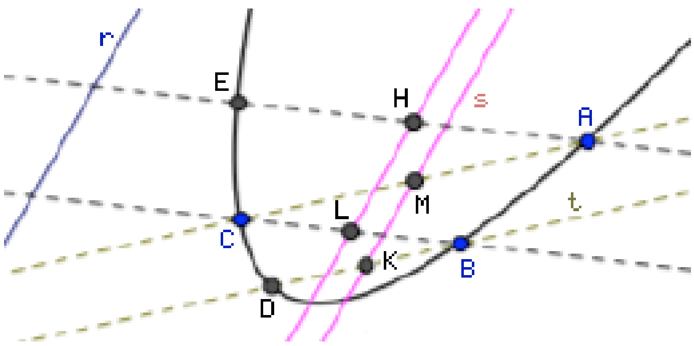
14.14. Fuochi e direttrici di un'iperbole. Tracciati gli asintoti, sia P il punto intersezione di uno di essi con la perpendicolare dal vertice I all'asse IJ. Allora $\overline{OP} = \sqrt{a^2+b^2} = c$ = distanza dei fuochi dal centro. La circonferenza di centro O e raggio c interseca l'asse IJ in F1 e F2, che sono i fuochi. Le direttrici sono ottenibili anche intersecando la circonferenza di centro O e raggio a con gli asintoti. Dette S e T le due intersezioni nel semipiano di origine l'asse trasverso e contenente I, la retta ST è la direttrice del fuoco F1. Sia infatti H l'intersezione di ST con IJ. Allora OSH è simile a OIP, perciò da $\overline{OS} = a$, $\overline{PI} = b$, $\overline{OP} = c$ si ha $\overline{SH} = \frac{a\cdot b}{c}$. Dal teorema di Pitagora, allora, $\overline{OH} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$.

Nelle costruzioni precedenti la conica era già assegnata. I software di geometria dinamica la costruiscono a partire da 5 punti. Come trovarne altri? Nel seguito vedremo alcune costruzioni di coniche, tra cui una basata sul teorema di Pappo – Pascal.

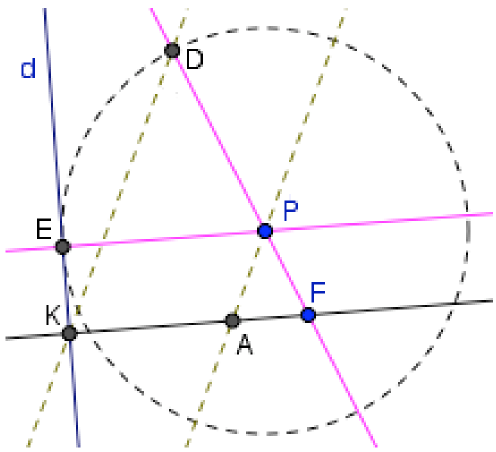
14.15. Costruzione di ulteriori punti di una conica assegnata mediante cinque punti A, B, C, D, E. Le rette AE e BD s'intersechino in K. Si traccino le rette CD e CE. Sia G un punto arbitrario di CD. Si tracci la retta KG e sia H la sua intersezione con CE. Le rette AG e BH s'intersecano in un punto L della conica individuata dai cinque punti dati.

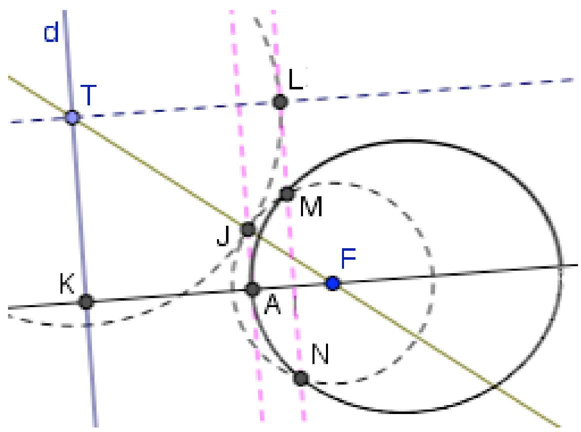


14.16. Costruzione di una parabola dati tre punti A, B, C, non allineati e la direzione dell'asse, non parallela ai lati di ABC. Si traccino la retta AC, il punto medio M di AC, la parallela s per M alla retta r, direzione dell'asse, e la parallela t per B alla retta AC. Posto $K = s \cap t$, si costruisca il simmetrico D di B rispetto a K: il punto D è sulla parabola. Analogamente, si tracci la retta BC, si trovi il punto medio L, si tracci la parallela per L alla retta r, la parallela per A alla retta BC e sia H l'intersezione di queste due rette. Il simmetrico E di A rispetto ad H è sulla parabola. Allora i punti A, B, C, D, E appartengono alla parabola. Poi, si prosegue come in 14.15.

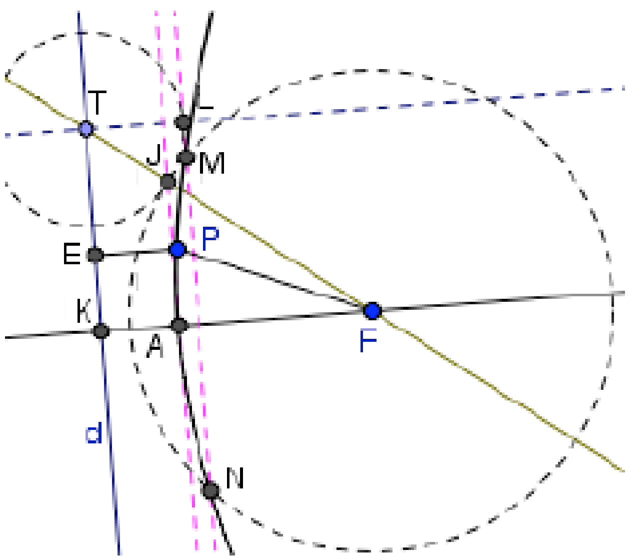


14.17. L'ellisse dati un fuoco F, la sua direttrice d ed un punto P. Per prima cosa, costruiamo l'asse dei fuochi ed il vertice A compreso tra F e d. Siano K ed E i piedi delle perpendicolari da F e P a d; la retta FK è l'asse dei fuochi della conica. Tracciamo la circonferenza di centro P e raggio PE, e sia D il punto intersezione con la retta PF dalla parte opposta ad F. La parallela per P alla retta DK taglia l'asse FK dei fuochi nel vertice A, dato che $\overline{AF} : \overline{AK} = \overline{PF} : \overline{PD} = \overline{PF} : \overline{PE} = \varepsilon$. Per ogni punto T su d, sia J l'intersezione tra la retta TF e la parallela per A a d. TJ, La perpendicolare per T a d intersechi la circonferenza di centro T e raggio TJ in L (nel semipiano contenente F). La parallela per L alla retta d interseca la circonferenza di centro F e raggio FJ nei punti M, N, che sono punti della conica. Infatti, $\overline{FM} = \overline{FN} = \overline{FJ}$, e la distanza di M ed N da d è $\overline{TL} = \overline{TJ}$. Allora il rapporto delle distanze di M ed N da F e da d eguaglia $\overline{FJ} / \overline{TJ} = \overline{FA} / \overline{KA} = \varepsilon$.

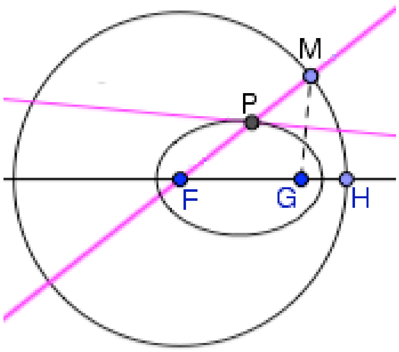


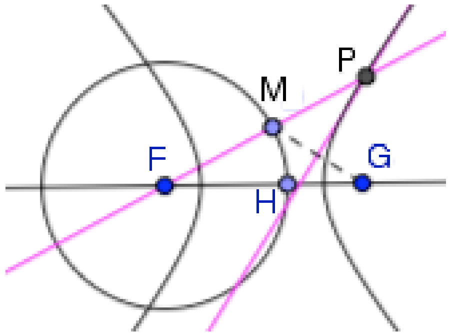


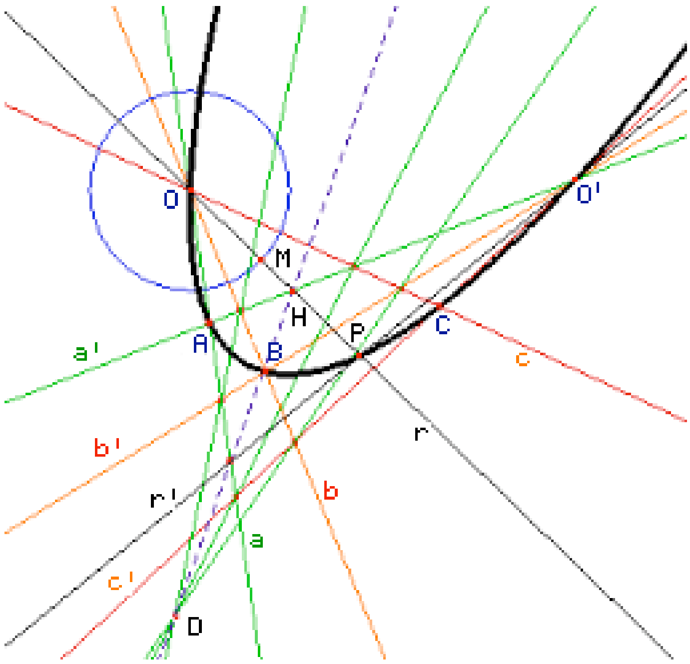
Nota. Se $\overline{PF} < \overline{PE}$ si ha un'ellisse, che però non si chiude nell'altro vertice (la figura è manipolata). Se $\overline{PF} > \overline{PE}$ si ottiene un solo ramo dell'iperbole, ed occorre ricavarne il centro e procedere per simmetria rispetto a questo ultimo per avere l'altro ramo. Se $\overline{PF} = \overline{PE}$ si ha una parabola, ma per ottenerla è necessario prendere P sull'asse di EF.



14.18. Una costruzione di ellisse ed iperbole dati una circonferenza ed un punto. Siano F e G due punti ed H un punto di FG. Si tracci la circonferenza di centro F e raggio FH, e si prenda su di essa un punto M. La retta FM incontri l'asse di MG in un punto P. Se G sta tra F ed H, P descrive un'ellisse, se H sta tra F e G, P descrive un'iperbole. In entrambi i casi, F e G sono i fuochi.



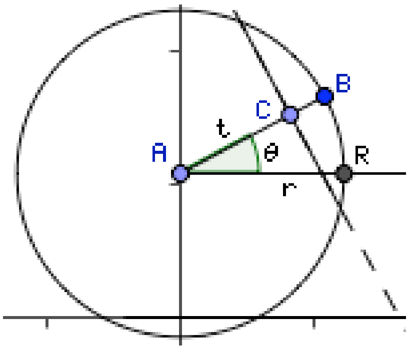




14.19. Una costruzione della conica per 5 punti O, A, B, C, O', col duale del teorema di Pappo e il teorema di Steiner. Si traccino le rette $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, $a' = O'A$, $b' = O'B$, $c' = O'C$. Per il duale del teorema di Pappo, le rette congiungenti i punti $a \cap b'$ e $a' \cap b$, $a \cap c'$ e $a' \cap c$, $b \cap c'$ e $b' \cap c$ passano per uno stesso punto D. Stabiliamo ora una proiettività tra il fascio di rette per O e quello per O', che associ a ed a', b e b', c e c'. Data una retta r per O, sia $H = r \cap a'$. La retta r' congiungente O' con a∩HD è la corrispondente di r. Sia $P = r \cap r'$. Al variare di r, per il teorema di Steiner P descrive una conica passante per O, A, B, C, O'. Per tracciare r, si fissi una circonferenza di centro O e su di essa si prenda un punto mobile M. Allora r = OM. Variando le posizioni dei punti A, B, C O, O' si ottengono le varie coniche.

15. Appendice 2: sezioni coniche

Sovente nei testi le coniche sono introdotte, storicamente, come sezioni piane di un cono di rotazione. Si usano i termini di ellisse, iperbole, parabola per denotare tali sezioni, ma successivamente si usano gli stessi termini per denotare luoghi geometrici nel piano cartesiano. Non si giustifica quasi mai l'uso di questi stessi stessi termini facendo vedere che la sezione e il luogo con lo stesso nome sono curve dello stesso tipo. Cerchiamo di farlo qui.



Fissiamo nello spazio cartesiano il punto $A = (0,0,1)$ come vertice del cono. Sia B un altro punto del piano $x = 0$. Tracciamo la sfera di centro A e raggio $r = \overline{AB}$: la sua equazione è $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = r^2$. L'intersezione col piano $x = 0$ dà una circonferenza sulla quale giace B. Possiamo individuare allora B nel modo seguente: $B = (0,\ r\cdot\cos(\theta),\ 1 + r\cdot\sin(\theta))$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Sul segmento AB fissiamo un punto $C = A + t\cdot(B-A) = (0,\ t\cdot r\cdot\cos(\theta),\ 1 + t\cdot r\cdot\sin(\theta))$, $0 < t < 1$. Il piano per C perpendicolare ad AB ha equazione $(B-A)^t \times (X-C) = 0$, ossia $y\cdot\cos(\theta) + z\cdot\sin(\theta) - r\cdot t - \sin(\theta) = 0$. Esso interseca la sfera in una circonferenza di equazione $\begin{cases} y\cdot\cos(\theta) + z\cdot\sin(\theta) = r\cdot t + \sin(\theta) \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = r^2 \end{cases}$. Costruiamo ora il cono circolare di asse la retta AB, congiungendo con rette il vertice A con i punti della circonferenza appena determinata.

Sia $D = (u, v, w)$ un punto di questa circonferenza. La retta AD ha equazione parametrica: $X = A + \tau\cdot(D-A)$, $\tau \in \mathbf{R}$, ossia $\begin{cases} x = \tau\cdot u \\ y = \tau\cdot v \\ z = 1 + \tau\cdot(w-1) \end{cases}$, $\tau \in \mathbf{R}$. Ora cerchiamo di otteneme l'equazione cartesiana. Poiché si ha:

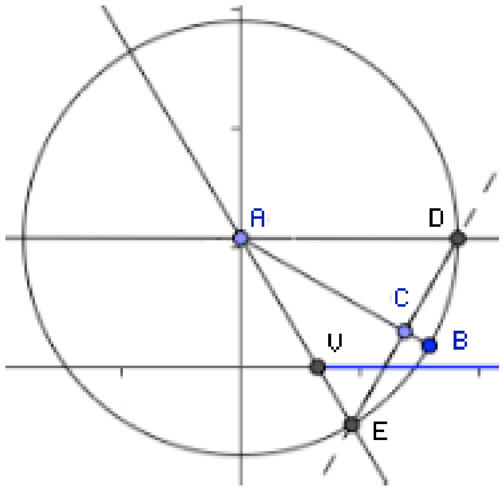
$\begin{cases} v \cdot \cos(\theta) + (w-1) \cdot \sin(\theta) = r \cdot t \\ u^2 + v^2 + (w-1)^2 = r^2 \end{cases}$, allora possiamo eliminare il parametro τ ed ottenere $t^2 \cdot \left(x^2 + y^2 + (z-1)^2\right) = \left(\cos(\theta) \cdot y + \sin(\theta) \cdot (z-1)\right)^2$. Ora intersechiamo il cono con il piano z = 0 ed otteniamo la conica:

$$t^2 \cdot \left(x^2 + y^2 + 1\right) = \left(\cos(\theta) \cdot y - \sin(\theta)\right)^2,\ 0 < t < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi$$

Di qui segue, con alcuni ovvii passaggi, l'equazione:

$$t^2 \cdot x^2 + \left(t^2 - \cos^2(\theta)\right) \cdot y^2 + 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot y + \left(t^2 - \sin^2(\theta)\right) = 0$$

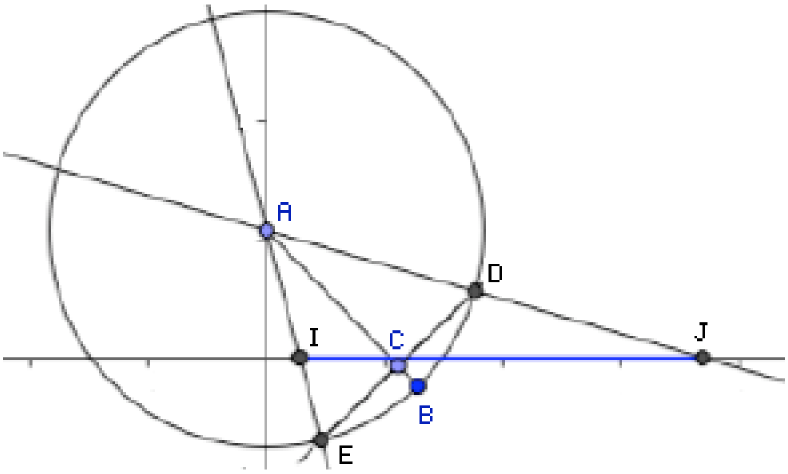
A questo punto, tutto dipende da $\left(t^2 - \cos^2(\theta)\right)$: se è nullo, si ha una parabola; se negativo, un'iperbole, se positivo un'ellisse.



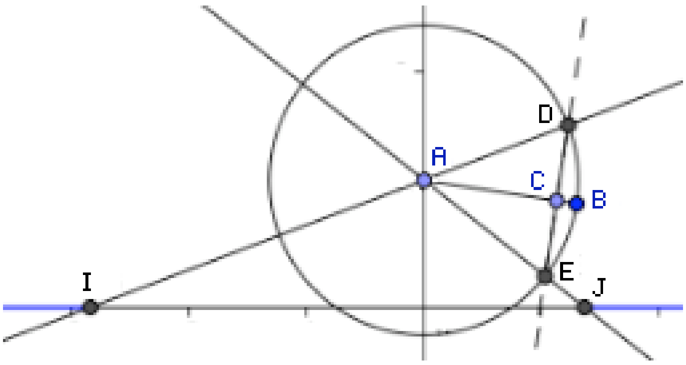
Vediamo il caso di $t = \pm\cos(\theta)$. Determiniamo le coordinate del punto D in cui la circonferenza $\begin{cases} y \cdot \cos(\theta) + z \cdot \sin(\theta) = r \cdot t + \sin(\theta) \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = r^2 \end{cases}$, di centro C, interseca il piano x = 0. Per questo, poniamo x = 0 e $t = \pm\cos(\theta)$, e ricaviamo y dall'equazione lineare:

$$y = \frac{r \cdot \cos(\theta) - (z-1) \cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta)} = r - (z-1) \cdot \tan(\theta),$$

Sostituendo nell'equazione quadratica, si ricavano le due soluzioni $z = 1$ oppure $z = r \cdot \sin(2 \cdot \theta)$. Dunque, $D = (0, r, 1)$ e la retta AD è parallela al piano z = 0. Allora, se il piano secante, che qui è z = 0, è parallelo ad una generatrice del cono (qui è la retta AD), si ha una parabola, e viceversa.



Nel caso in cui $\left(t^2 - \cos^2(\theta)\right) > 0$, il piano attraversa tutte le generatrici del cono in una stessa falda, ed è il caso dell'ellisse.



Se $\left(t^2 - \cos^2(\theta)\right) > 0$, il piano attraversa entrambe le falde. Siamo nel caso dell'iperbole.

Se scegliamo il vertice A nell'origine, abbiamo coniche degeneri sul piano z = 0. Nei tre casi del segno di $\left(t^2 - \cos^2(\theta)\right)$ abbiamo una retta doppia se è nullo, un solo punto reale se è positivo, due rette distinte se è negativo.

Considerazioni simili si possono fare per un cono la cui *direttrice*, anziché essere una circonferenza, sia una conica non degenere qualsiasi. A seconda del piano secante si ottiene una conica di un tipo o dell'altro. Si torna così al problema proposto nella Lezione 1.