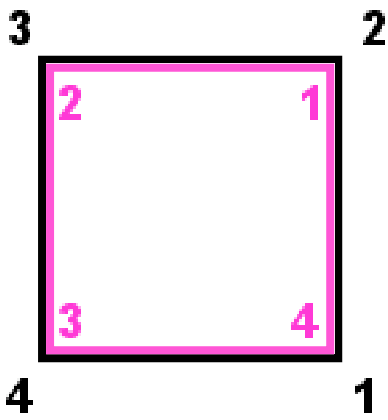
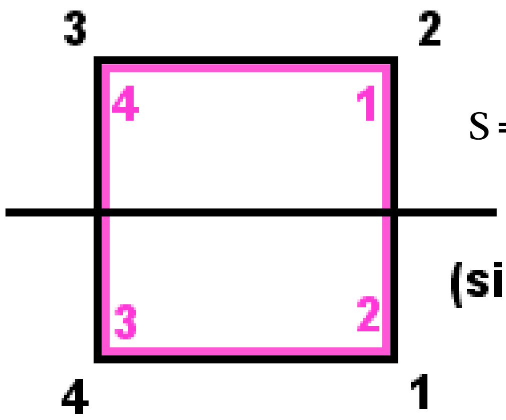
IL GRUPPO D_4 DEL QUADRATO

G = D_4 ha una rappresentazione fedele di grado 4, data dalla sua azione sui vertici del quadrato:



$$r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1234)$$

(rotazione di 90° antioraria)



$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (12)(34)$$

(simmetria rispetto ad un asse)

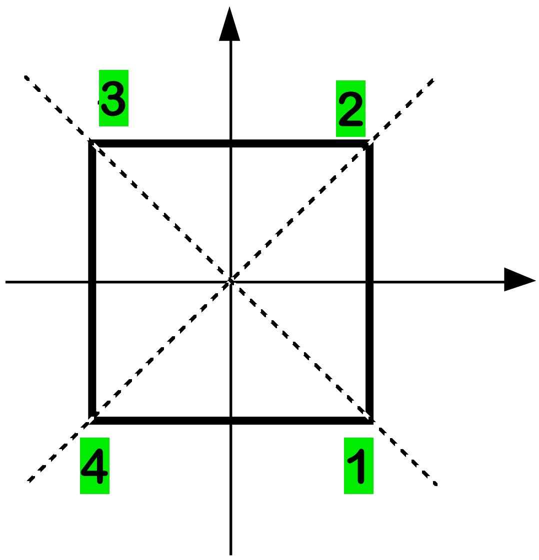
Le due permutazioni r ed s generano D_4:

$$D_4 = \{id,\ r,\ s,\ r^2,\ rs,\ r^3,\ r^2s,\ sr\}$$

Il gruppo D_4 contiene quattro rotazioni, di ampiezze $k \cdot \frac{2\pi}{4}$, k = 0, 1, 2, 3, intorno all'origine, e quattro simmetrie assiali rispetto agli assi ed alle diagonali.

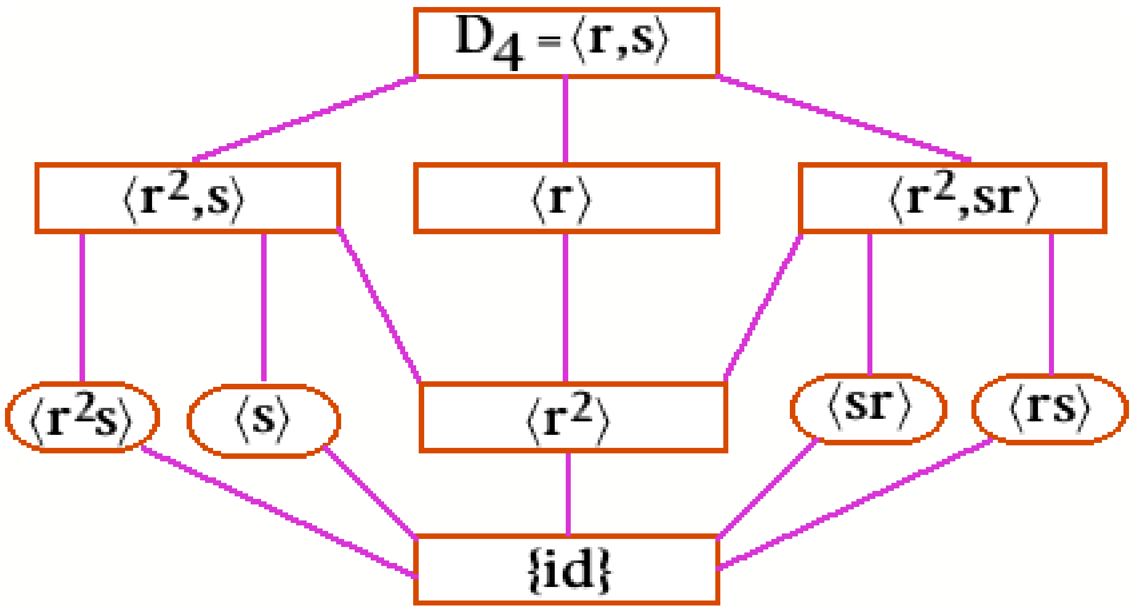
Per calcolarne la tavola, riordiniamo gli elementi in modo da evidenziare il sottogruppo delle rotazioni

$$D_4 = \{id,\ r,\ r^2,\ r^3,\ s,\ rs,\ r^2s,\ sr\}$$



$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	1	7	8	6	5
3	3	4	1	2	6	5	8	7
4	4	1	2	3	8	7	5	6
5	5	8	6	7	1	3	4	2
6	6	7	5	8	3	1	2	4
7	7	5	8	6	2	4	1	3
8	8	6	7	5	4	2	3	1

Ed ecco il diagramma dei sottogruppi:



Il gruppo D_4 presenta tre sottogruppi d'ordine 4, normali perché di indice 8:4 = 2, abeliani, ma uno ciclico, generato dalla rotazione r,

$$\langle r \rangle = \{id,\ r,\ r^2,\ r^3\}$$

e due non ciclici, corrispondenti rispettivamente ai gruppi di simmetria del rettangolo e del rombo:

$$\langle s,\ r^2 \rangle = \{id,\ r^2,\ s,\ r^2 s\}$$

$$\langle rs,\ r^2 \rangle = \{id,\ r^2,\ rs,\ sr\}$$

L'intersezione dei tre sottogruppi d'ordine 4 è il sottogruppo $\langle r^2 \rangle = \{id,\ r^2\}$, i cui elementi commutano con tutti gli altri ed è il centro del gruppo.

Il quoziente del gruppo D_4 rispetto a questo sottogruppo ha ordine 4 ed è non ciclico.

Gli altri quattro sottogruppi di ordine 2 non sono normali in D_4.

Il gruppo D_4 ha una rappresentazione fedele come gruppo di matrici 4×4 su un campo K qualsiasi. Per esempio,

$$r=(1234)\to\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad s=(12)(34)\to\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Come gruppo di permutazioni non si può fare di meglio. Come gruppo lineare, invece si può.

Nel piano cartesiano le isometrie si possono rappresentare algebricamente. Quelle che trasformano in sé l'origine sono applicazioni lineari. In tal modo, il gruppo diedrale D_4 diviene un gruppo di matrici di ordine 2 sul campo reale:

$$D_4\cong\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

I numeri che compaiono in queste matrici sono solo 1, 0, -1, cioè sono interi. In ogni campo di caratteristica diversa da 2 abbiamo quindi un analogo gruppo di matrici, che è ancora isomorfo a D4.