IL GRUPPO DELLE ISOMETRIE PIANE

Introdurremo qui un particolare gruppo non abeliano, il gruppo delle isometrie piane, di cui classificheremo gli elementi. Definiremo poi il gruppo di isometrie di una figura piana e ne determineremo alcune proprietà. Infine, daremo una rappresentazione analitica delle isometrie piane ed alcune proprietà gruppali.

Sia $\wp$ l'insieme dei punti del piano. Secondo consuetudine, indichiamo con lettere maiuscole A, B, P, ... i punti, con minuscole r, s, ... le rette, con lettere greche α, β, ... gli angoli e con f, g, σ, τ, ... le funzioni. L'uguaglianza in senso geometrico di figure piane sarà denotata con $\equiv$.

Se $f: \wp \to \wp$ è una funzione ed f(P) = P, P si dirà *punto unito* per f. Analogamente, la retta r si dice *retta unita* per f se f(r) = r.

Chiamiamo *isometria del piano* una biiezione $f : \wp \xrightarrow[su]{1-1} \wp$ tale che, per ogni coppia P, Q di punti, posto P' = f(P), Q' = f(Q), si ha P'Q' $\equiv$ PQ.

Mediante il III criterio di uguaglianza dei triangoli si prova subito che se se f è un'isometria, dati i tre punti P, Q, R e posto P' = f(P), Q' = f(Q), R' = f(R), i due triangoli PQR e P'Q'R' sono uguali. Pertanto se R appartiene alla retta PQ anche R' appartiene alla retta P'Q'. Di conseguenza, ogni isometria trasforma rette in rette.
Inoltre, essa trasforma una circonferenza in una circonferenza con lo stesso raggio.

Denotiamo con G l'insieme delle isometrie e con id la funzione identità del piano $\wp$. Si ha:

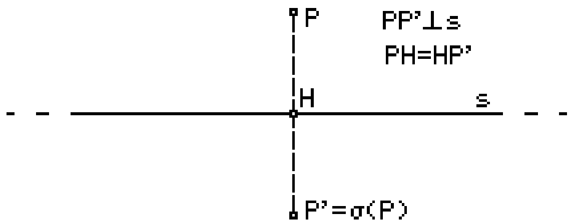
Proposizione 1.1. G è un sottogruppo del gruppo simmetrico $S_\wp$ delle biiezioni del piano $\wp$ in sé.

Dimostrazione. Ovviamente, id$\in$G. Inoltre, siano f, g$\in$G e siano P, Q due punti. Posto P' = f(P), Q' = f(Q), P" = g(P'), Q" = g(Q'), si ha P"Q" $\equiv$ P'Q', perché g è un'isometria, P'Q' $\equiv$ PQ, perché f è un'isometria, quindi P"Q" $\equiv$ PQ. Ma allora anche g$\circ$f, che trasforma P in P" e Q in Q", è un'isometria. Infine, essendo PQ ≡ P'Q', anche f^{-1}, che porta P' in P e Q' in Q, è un'isometria.

Siano s una retta e P un punto. Denotiamo con P' il *simmetrico* di P rispetto ad s, ossia il punto tale che la retta PP' sia perpendicolare ad s e il punto medio del segmento PP' appartenga ad s (*).

La funzione σ che ad ogni P associa il simmetrico P' si chiama *simmetria (assiale)* rispetto alla retta s, che prende il nome di *asse di simmetria*.

Si osservi che ogni punto di s è unito per σ; sono inoltre rette unite per σ sia s che le sue perpendicolari.



Esercizio 1.2. Ogni simmetria assiale è una isometria.

Vogliamo ora arrivare a provare che le simmetrie assiali sono un sistema di generatori per G. Di qui discenderà poi un criterio per classificare le isometrie piane. Per questo scopo occorrono tre lemmi.

LEMMA 1.3. Siano A, B due punti distinti: esistono due e solo due isometrie aventi A e B come punti uniti: l'identità e la simmetria σ rispetto alla retta AB.

Dimostrazione. Innanzitutto id e σ trasformano in sé sia A che B. Proviamo che sono le sole.

Sia s la retta AB e sia f∈G, tale che A e B siano uniti per f. Innanzitutto, s è unita per f ed inoltre, per ogni punto P di s, si ha P' = f(P), essendo PA ≡ P'A, PB ≡ P'B. Dunque ogni punto di s è unito per f. Distinguiamo due casi:

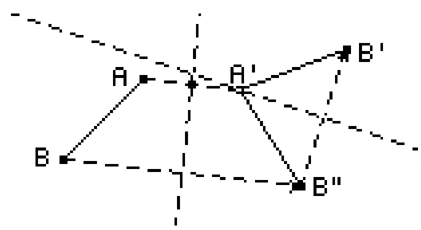
a) f abbia un punto unito C fuori di s. Allora, ragionando come sopra, poiché su ciascuna delle rette AC e BC f ha due punti uniti, tutti i punti di AC e di BC sono uniti per f. Ciò posto, da ogni punto P si conduca una retta r, che intersechi le tre rette AB,

(*) Le figure qui mostrate sono ottenute con l'applicazione Geometry (≅ Cabri II) della calcolatrice Voyage200. Si consiglia di tracciare sempre le figure descritte nel testo.

AC, BC in almeno due punti distinti. Su r l'isometria f ha almeno due punti uniti, quindi anche P è unito. Ne segue $f \equiv id$.
b) f non abbia punti uniti fuori di s. Per ogni punto P non appartenente ad s, posto $P' = f(P)$, si ha $ABP \equiv ABP'$, dunque P' deve essere il simmetrico di P rispetto ad s. Ne segue $f = \sigma$.

LEMMA 1.4. Dati due segmenti uguali AB ed A'B' (non degeneri, cioè con $A \neq B$, $A' \neq B'$), esistono due e solo due isometrie f_1 ed f_2 che portano A in A' e B in B'. Detta σ la simmetria rispetto alla retta A'B', si ha $f_2 = \sigma \circ f_1$. Inoltre, ciascuna delle due è prodotto di al più tre simmetrie.

Dimostrazione. Proviamo dapprima l'esistenza, distinguendo tre casi.
a) $A = A'$, $B = B'$. Allora ci sono $f_1 = id$ ed $f_2 = \sigma$. Si ha $f_2 = \sigma \circ f_1$ e, essendo $f_1 = \sigma^2$, ciascuna delle due è prodotto di al più tre simmetrie.
b) $A = A'$, $B \neq B'$. Sia σ_1 la simmetria rispetto all'asse r del segmento BB': r passa per A, dunque A (= A') è unito per σ_1 e B è portato in B'. Pertanto, posto $f_1 = \sigma_1$ e $f_2 = \sigma \circ \sigma_1$, entrambe queste isometrie portano A in A' e B in B', sono prodotto di al più tre simmetrie, e si ha $f_2 = \sigma \circ f_1$.
c) $A \neq A'$, $B \neq B'$. Sia σ_2 la simmetria rispetto all'asse del segmento AA': essa porta A in A' e B in un punto B''. Sia poi σ_1 la simmetria rispetto all'asse del segmento B''B': essa porta A' in sé e B'' in B'. Pertanto $f_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ porta A in A' e B in B' e lo stesso accade per $f_2 = \sigma \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) = \sigma \circ f_1$. Inoltre, anche in questo caso, ciascuna delle due è prodotto di al più tre simmetrie.



Proviamo che sono le uniche due. Sia $f \in G$, tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$: allora $f \circ f_1^{-1}$ trasforma in sé sia A' che B': per il lemma 12.3 si ha $f \circ f_1^{-1} = id$ (quindi $f = f_1$) oppure $f \circ f_1^{-1} = \sigma$, quindi $f = \sigma \circ f_1 = f_2$.

LEMMA 1.5. Dati due triangoli (non degeneri) ABC ed A'B'C', con $A'B' \equiv AB$, $A'C' \equiv AC$, $B'C' \equiv BC$, esiste una ed una sola isometria che porti A in A', B in B', C in C', ed essa coincide con una delle due che portano A in A' e B in B'.

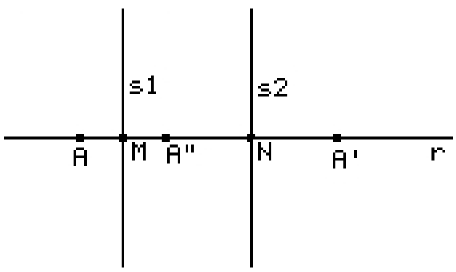
Dimostrazione. Innanzitutto, per il lemma 1.4, ogni isometria che trasformi A in A', B in B', C in C' coincide con una delle due, f_1 o f_2, che portano A in A' e B in B'. Ciò posto esaminiamo f_1 ed f_2.
Se $f_1(C) \neq C'$ allora $f_1(C)$ è il simmetrico di C' rispetto alla retta A'B' e, detta al solito σ la simmetria rispetto a tale retta, si ha $f_2(C) = \sigma \circ f_1(C) = C'$. Se invece $f_1(C) = C'$, allora $f_2(C) \neq C'$. In ogni caso, dunque, esiste una ed una sola isometria che porti A in A', B in B', C in C', ed è una delle due isometrie f_1 o f_2.

TEOREMA 1.6. Ogni isometria è esprimibile come prodotto di al più tre simmetrie assiali.

Dimostrazione. Sia f un'isometria e siano A, B, C tre punti non allineati. Posto $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, per il lemma 1.5, f coincide con una delle due, f_1 ed f_2, che portano A in A' e B in B' e che, come risulta dal lemma 1.4, sono prodotto di al più tre simmetrie. Ciò prova il teorema.

Incominciamo ora a studiare il prodotto di due simmetrie assiali σ_1 e σ_2 di assi rispettivamente s_1 ed s_2. Innanzitutto, se i due assi coincidono, il prodotto $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è l'identità. Distinguiamo ora due casi.

A) Simmetrie con gli assi paralleli. Siano A un punto del piano, r la perpendicolare comune da A ai due assi e sia M l'intersezione di r con s_1, ed N quella con s_2. Poniamo poi $A'' = \sigma_1(A)$, $A' = \sigma_2(A'')$. Tutti i punti considerati appartengono ad r. Inoltre $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ trasforma A in A' e si ha:



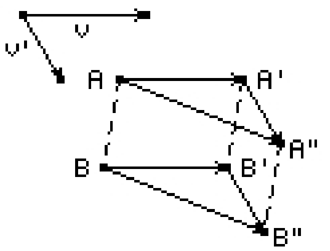
$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AA''} + \overrightarrow{A''A'} = 2\overrightarrow{MA''} + 2\overrightarrow{A''N} = 2\overrightarrow{MN}$$

Pertanto, ad ogni punto A è associato da τ il punto A' sulla perpendicolare da A ai due assi, con distanza doppia rispetto a quella tra i due assi stessi e con verso concorde con quello da M ad N.

L'isometria τ prende il nome di *traslazione*. Ad essa è associato un vettore $v = v(\tau)$ del piano, pari al doppio del vettore $\overrightarrow{MN}$, e per ogni punto P si ha $P' = \tau(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{PP'} = 2\overrightarrow{MN}$. Inversamente, dato un vettore v non nullo, si fissino due rette s_1 ed s_2 perpendicolari a v, con distanza fra di esse pari alla metà del modulo di v e tali che, fissata una qualunque perpendicolare r ad entrambe e detti M ed N i punti di intersezione di r con s_1 ed s_2, il vettore $\overrightarrow{MN}$ risulti concorde con v. Allora, detta σ_i la simmetria di asse s_i, l'isometria $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$ è una traslazione e si ha $v(\tau) = v$.

L'identità id si può in particolare considerare una traslazione, prodotto di due simmetrie con assi coincidenti; precisamente è la traslazione associata al vettore nullo.

Siano A, B due punti e siano $A' = \tau(A)$, $B' = \tau(B)$. I segmenti orientati $\overrightarrow{AA'}$ e $\overrightarrow{BB'}$ rappresentano entrambi il vettore v, pertanto ABB'A' è un parallelogrammo.



Siano ora τ' un'altra traslazione, $v' = v(\tau')$, $A'' = \tau'(A')$, $B'' = \tau'(B')$: come sopra si ha che A'B'B"A" è un parallelogrammo: ne viene che i tre segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A''B''}$ sono equipollenti (cioè hanno la stessa lunghezza, sono paralleli ed equiversi) e, di conseguenza, il quadrilatero ABB"A" è un parallelogrammo. Ma allora l'isometria $\tau'' = \tau' \circ \tau$ è a sua volta una traslazione, precisamente quella associata al vettore $v'' = \overrightarrow{AA''}$, che risulta essere uguale a v+v'. Si ha così il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 1.7. L'insieme T delle traslazioni costituisce un sottogruppo abeliano del gruppo G delle isometrie piane.

Dimostrazione. Abbiamo già provato la chiusura di T rispetto alla composizione ed all'identità. Infine, se $\tau \in T$, $\tau = s_2 \circ s_1$, allora $\tau^{-1} = s_1 \circ s_2$ è ancora una traslazione. Pertanto, T costituisce un sottogruppo di G. Tale sottogruppo è abeliano, poiché alla composizione di traslazioni corrisponde biunivocamente l'addizione dei vettori associati, che è commutativa.

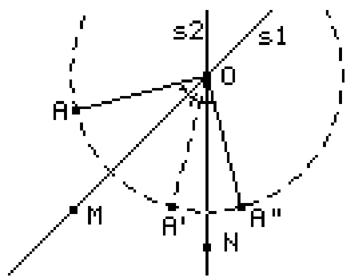
Osservazioni. 1. La funzione che associa ad ogni $t \in T$ il corrispondente vettore $v = v(\tau)$ è un isomorfismo tra il gruppo $(T, \circ)$ ed il gruppo additivo $(R^2, +)$ dei vettori del piano.

2. Sia τ una traslazione $\neq$ id e sia d il modulo del vettore associato. Allora per ogni punto P, e per ogni $n \in N$, posto $P_n = \tau^n(P)$, la lunghezza del segmento PP_n è nd. Di conseguenza, tutte le traslazioni diverse dall'identità hanno periodo infinito, poiché per ogni $n \geq 1$ si ha $P_n \neq P$ e quindi $\tau^n \neq \tau$.

3. Se due simmetrie con assi paralleli individuano (in un fissato ordine) una traslazione, viceversa una traslazione è individuata da infinite coppie di simmetrie con assi paralleli: una di esse può essere scelta arbitrariamente, purché il suo asse sia perpendicolare al vettore $v(\tau)$.

4. Sia τ una traslazione $\neq$ id e sia v il suo vettore associato. Le rette parallele a v sono unite per τ, mentre nessun'altra retta e nessun punto lo sono.

B) SIMMETRIE CON ASSI INCIDENTI. Siano σ_1 e σ_2 le due simmetrie, s_1 ed s_2 i loro assi ed O il punto di intersezione degli assi. Sia poi $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Il punto O è unito per ρ, dunque sono trasformate in sé tutte le circonferenze di centro O. Per ogni punto A, posto $A'' = \sigma_1(A)$, $A' = \sigma_2(A'')$, i punti A, A'' ed A' appartengono alla stessa circonferenza di centro O e raggio OA.



La retta s_1 è bisettrice dell'angolo $A\hat{O}A'$, mentre s_2 lo è di $A'\hat{O}A''$. Pertanto, denotando con $\alpha/2$ l'angolo convesso orientato in senso antiorario da s_1 ad s_2, si ha $A\hat{O}A'' = \alpha$. Lo stesso accade per ogni punto.

Chiamiamo ρ *rotazione* di centro O ed ampiezza α: per ogni punto P si ha dunque $P' = \rho(P)$ se e solo se $OP \equiv OP'$ e $P\hat{O}P' = \alpha$.

L'identità del piano si può considerare anche come una rotazione di centro O ed ampiezza nulla (id è il prodotto di due simmetrie con assi coincidenti, cioè incidenti in tutti i punti). Si può dimostrare il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 12.8. L'insieme delle rotazioni di centro O costituisce un sottogruppo abeliano del gruppo G delle isometrie piane. Se ρ_1 e ρ_2 sono rotazioni di ampiezze rispettivamente α_1 ed α_2, $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ è una rotazione di ampiezza $\alpha_1+\alpha_2$ (modulo 2π, cioè identificando l'angolo giro con l'angolo nullo).

Osservazioni. 1. Il gruppo delle rotazioni di centro O è isomorfo al gruppo additivo dei numeri reali modulo 2π: l'isomorfismo si ottiene associando ad ogni rotazione la sua ampiezza.

2. Una rotazione ρ di ampiezza α ha periodo finito se e solo se esiste $k \in Z$, $k > 0$, tale che $\rho^k = id$, ossia se e solo se $k\alpha$ è l'angolo nullo. Denotata ancora con α la misura in radianti dell'ampiezza, ciò è possibile se e solo se esistono m, n interi positivi tali che $n\alpha = 2m\pi$. In tal caso, $\alpha = 2\frac{m}{n}\pi$. Supponendo la frazione $\frac{m}{n}$ ridotta ai minimi termini, il periodo di ρ è uguale al denominatore n di tale frazione.

3. Se due simmetrie con assi incidenti individuano (in un fissato ordine) una rotazione, viceversa una rotazione è individuata da infinite coppie di simmetrie con assi incidenti: una di esse può essere scelta arbitrariamente, purché il suo asse passi per il centro della rotazione.

4. Sia ρ una rotazione di centro O e di ampiezza α non nulla. Se α non è l'angolo piatto, oltre ad O non vi sono punti o rette uniti per ρ. Se invece α è l'angolo piatto, sono unite per ρ anche tutte le rette passanti per O. Quest'ultima rotazione è detta *simmetria centrale* di centro O ed è l'unica di periodo 2.

LEMMA 1.9. Siano ρ_1 e ρ_2 due rotazioni di centri distinti O_1 ed O_2 ed ampiezze α_1 ed α_2. Se $\alpha_1+\alpha_2$ è l'angolo nullo, $\rho_2 \circ \rho_1$ è una traslazione, altrimenti è una rotazione di ampiezza $\alpha_1+\alpha_2$. In ogni caso, $\rho_1 \circ \rho_2 \neq \rho_2 \circ \rho_1$.

Dimostrazione. Rappresentiamo le rotazioni come prodotto di simmetrie, ma, tenendo conto dell'osservazione 3 ad 1.8, scegliamo i fattori in modo che risulti $\rho_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$, $\rho_2 = \sigma_4 \circ \sigma_3$, dove σ_3 e σ_2 coincidono con la simmetria di asse O_1O_2.

Allora $\sigma_3 \circ \sigma_2 = id$, quindi $\rho_2 \circ \rho_1 = \sigma_4 \circ \sigma_1$ è una rotazione o una traslazione. E' una traslazione se e solo se gli assi s_4 ed s_1 delle due simmetrie sono paralleli, il che accade se e solo se gli angoli coniugati interni che essi formano con la retta O_1O_2 sono supplementari, cioè hanno per somma un angolo piatto. Tali angoli sono rispettivamente metà delle ampiezze delle due rotazioni, dunque $\rho_2 \circ \rho_1$ è una traslazione se e solo se $\alpha_1+\alpha_2$ è l'angolo giro, identificato con l'angolo nullo.

Altrimenti, detto O il punto intersezione di s_4 ed s_1, $\rho_2 \circ \rho_1$ è una rotazione di centro O e, poiché l'angolo (orientato) di vertice O tra s_1 ed s_4 è esterno al triangolo OO_1O_2, è somma dei due interni non adiacenti, cioè di metà delle ampiezze α_1 ed α_2. Ne segue che $\rho_2 \circ \rho_1$ ha ampiezza $\alpha_1+\alpha_2$.

Infine, si può provare che, nel caso di $\alpha_1+\alpha_2$ uguale all'angolo nullo, le due traslazioni $\rho_1 \circ \rho_2$ e $\rho_2 \circ \rho_1$ hanno versi opposti, mentre se $\alpha_1+\alpha_2$ non è l'angolo nullo, le due rotazioni $\rho_1 \circ \rho_2$ e $\rho_2 \circ \rho_1$ hanno centri simmetrici rispetto alla retta O_1O_2.

LEMMA 1.10. Componendo una rotazione ρ con una traslazione τ si ottiene una rotazione di ampiezza uguale a quella di ρ.

Dimostrazione. Come nel lemma precedente, siano $\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1$, $\tau = \sigma_4 \circ \sigma_3$, con $\sigma_2 = \sigma_3$. Allora gli assi s_4 ed s_1 si incontrano in un punto O' e $\tau \circ \rho = \sigma_4 \circ \sigma_1$ è una rotazione. Il teorema sugli angoli alterni di rette parallele tagliate da una trasversale assicura che l'ampiezza della composta coincide con quella di ρ.

Analogamente si procede per valutare $\rho \circ \tau$.

Rotazioni e traslazioni sono dette anche *movimenti* o *isometrie dirette* del piano. Si ha:

TEOREMA 1.11. L'insieme M dei movimenti del piano costituisce un sottogruppo del gruppo G delle isometrie.

Dimostrazione. Abbiamo già provato in 1.7, 1.9. 1.10 che componendo due movimenti si ottiene un movimento. Inoltre, l'identità è un movimento e l'inversa di una traslazione è una traslazione (di vettore opposto), mentre l'inversa di una rotazione è una rotazione con lo stesso centro ed ampiezza opposta (cioè esplementare).

COROLLARIO 1.12. Ogni prodotto di un numero pari di simmetrie è un movimento. Ogni prodotto di un numero dispari di simmetrie è prodotto di un movimento per una simmetria.

Chiamiamo *isometria inversa* ogni isometria che non sia un movimento. Sono dunque isometrie inverse le simmetrie ed i prodotti di tre simmetrie.

Il prodotto di due isometrie inverse è un movimento, perché prodotto di un numero pari di simmetrie, mentre l'inversa di un'isometria inversa è ancora un'isometria inversa.

Si tratta ora di classificare le isometrie inverse, ovvero di classificare i prodotti di tre simmetrie.

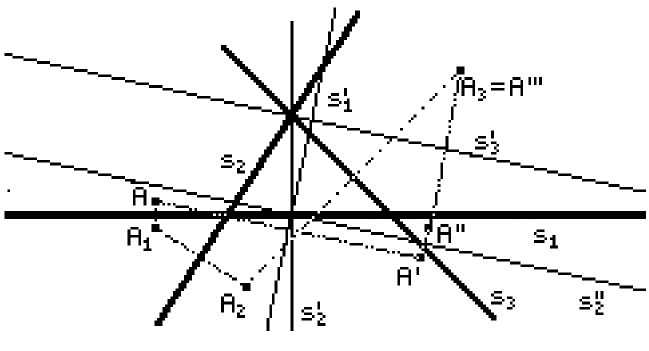
Chiamiamo innanzitutto *antitraslazione* (o *glissosimmetria*) il prodotto di una traslazione τ per una simmetria σ di asse parallelo al vettore $v = v(\tau)$. Si verifica facilmente che si ha $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$.

TEOREMA 1.13. Le isometrie inverse sono simmetrie assiali o antitraslazioni.

Dimostrazione. Sia dato il prodotto di tre simmetrie σ_i di assi s_i. Se i tre assi sono paralleli o se passano per uno stesso punto, il risultato è una simmetria. Infatti, nel primo caso il prodotto $\sigma_3 \circ \sigma_2$ è una traslazione τ, che possiamo riottenere come prodotto di due nuove simmetrie σ'_3 e σ'_2, ma con $\sigma'_2 = \sigma_1$. Allora:

$$(\sigma_3 \circ \sigma_2) \circ \sigma_1 = (\sigma'_3 \circ \sigma'_2) \circ \sigma_1 =$$

$$\sigma'_3 \circ (\sigma'_2 \circ \sigma_1) = \sigma'_3.$$



Analogamente si ragiona se i tre assi passano per uno stesso punto. Vediamo gli altri casi.

Supponiamo s_2 ed s_3 non paralleli. Allora $\sigma_3 \circ \sigma_2$ è una rotazione, che possiamo rappresentare con altre due rette s'_2 ed s'_3 con s'_2 perpendicolare ad s_1. Allora $\sigma'_2 \circ \sigma_1$ è una rotazione r di ampiezza un angolo piatto, cioè una simmetria centrale, il cui centro è il punto d'incontro di s'_2 ed s_1. Possiamo rappresentare r mediante due nuove rette s''_2 ed s'_1

con s'_1 perpendicolare ad s'_3, e quindi con s''_2 parallela ad s'_3. Ne segue che $\sigma'_3 \circ \sigma'_2$ è una traslazione t, il cui vettore v è parallelo all'asse di σ'_1, cioè $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1 = r \circ \sigma'_1$ è un'antitraslazione.
Se invece s_2 ed s_3 sono paralleli, non lo sono però s_1 ed s_2, e si ragiona analogamente.

Osservazioni. 1. Sia a un'antitraslazione, $a = t \circ \sigma$; come già osservato, si ha anche $a = \sigma \circ t$: allora $a^2 = a \circ a = t \circ \sigma \circ \sigma \circ t = t^2$, cioè a^2 è una traslazione. Ne consegue che a ha periodo infinito.
2. Sia a un'antitraslazione, $a = t \circ \sigma$. L'asse s della simmetria σ è unito per a, mentre nessun'altra retta e nessun punto lo sono. Per ogni punto A, posto $A' = a(A)$, il punto medio di AA' appartiene ad s, che è chiamato *asse* dell'antitraslazione.

La classificazione è così completa. Riassumendo, vi sono quattro tipi di isometrie piane: le traslazioni, le rotazioni, le simmetrie assiali e le antitraslazioni. I primi due tipi costituiscono le isometrie dirette o movimenti, le altre costituiscono le isometrie inverse.

L'identità id è un'isometria diretta e si può identificare con la traslazione associata al vettore nullo, oppure con la rotazione di ampiezza nulla e centro arbitrario.

isometria	**periodo**	**punti uniti**	**rette unite**
Identità	1	tutti	tutte
Traslazione di vettore $v \neq 0$	infinito	nessuno	le parallele a v
Rotazione di centro O e ampiezza $\alpha \neq 0, \pi$	finito o no	O	nessuna
Simmetria centrale	2	O	le rette per O
Simmetria di asse s	2	i punti di s	s e le sue perpend.
Antitraslazione di asse s	infinito	nessuno	s

IL GRUPPO D'ISOMETRIE DI UNA FIGURA. Il gruppo G delle isometrie piane è un gruppo di permutazioni sui punti del piano $\wp$. Esso agisce sull'insieme delle *figure piane*, cioè sull'insieme dei sottoinsiemi di $\wp$.

Chiamiamo *gruppo di isometrie* di una figura $\mathfrak{I}$ lo *stabilizzatore* $G_{\mathfrak{I}}$ di $\mathfrak{I}$ in G, costituito da tutte le isometrie di G che trasformano l'insieme $\mathfrak{I}$ in se stesso. Descriviamo ora tale gruppo per una classe importante di figure.

Una figura $\mathfrak{I}$ si dice *limitata* se è contenuta in un cerchio. Il teorema seguente descrive gli elementi di una figura limitata.

TEOREMA 1.14. Sia $\mathfrak{I}$ una figura limitata e sia $G_{\mathfrak{I}}$ il suo gruppo d'isometrie. Allora si ha:

a) $G_{\mathfrak{I}}$ non contiene né traslazioni (a parte l'identità) né antitraslazioni.

b) Tutte le rotazioni appartenenti a $G_{\mathfrak{I}}$ hanno lo stesso centro, per il quale passano tutti gli assi delle (eventuali) simmetrie appartenenti a $G_{\mathfrak{I}}$.

Dimostrazione. a) Per assurdo sia t una traslazione $\neq$ id appartenente a $G_{\mathfrak{I}}$ e sia d il modulo di v(t). Siano poi d il diametro di un cerchio contenente $\mathfrak{I}$ e P un punto di $\mathfrak{I}$. Per l'osservazione 4 al teorema 1.7, per ogni $n \in N$, posto $P_n = t^n(P)$, la lunghezza del segmento PP_n è nd. Dunque, per $n > d/d$ si ha $PP_n > d$, quindi P_n non appartiene al cerchio che copre $\mathfrak{I}$ e pertanto neppure ad $\mathfrak{I}$, nonostante $P \in \mathfrak{I}$ e $t^n \in G_{\mathfrak{I}}$, assurdo.

Di conseguenza, poiché il quadrato di un'antitraslazione è una traslazione, $G_{\mathfrak{I}}$ non può contenere neppure antitraslazioni.

b) Siano per assurdo r_1 e ρ_2 due rotazioni appartenenti a $G_{\mathfrak{I}}$ e con centri diversi. Allora $\rho_1 \circ \rho_2$ e $\rho_2 \circ \rho_1$ appartengono a $G_{\mathfrak{I}}$ e, per a), non possono essere traslazioni, per cui, per 1.9, sono rotazioni con la stessa ampiezza a e centri diversi.

Essendo però $a+(-a) = 0$, l'isometria $(\rho_2 \circ \rho_1) \circ (\rho_1 \circ \rho_2)^{-1}$, che appartiene a $G_{\mathfrak{I}}$, è una traslazione, assurdo.

Infine vi siano per assurdo in $G_{\mathfrak{I}}$ una rotazione r di centro O ed una simmetria σ di asse s non passante per O. Il prodotto $r \circ \sigma$ è un'isometria inversa, prodotto di tre simmetrie i cui assi non passano per uno stesso punto né sono tutti paralleli, quindi è un'antitraslazione, assurdo.

Proposizione 1.15. Sia H è un sottogruppo finito di G, allora i suoi elementi sono o tutte rotazioni con lo stesso centro, quindi H è ciclico, oppure metà dei suoi elementi sono rotazioni e metà sono simmetrie assiali i cui assi passano per il centro di rotazione, ed H è diedrale.

Dimostrazione. Poiché traslazioni non banali ed antitraslazioni hanno periodi infiniti, allora H non ne contiene. Come nella dimostrazione del teorema precedente, se H contenesse rotazioni con centri diversi o una rotazione ed una simmetria con asse non passante per i centro della rotazione, allora H conterrebbe anche una traslazione non banale, assurdo. Perciò gli elementi di H sono come detto nell'enunciato. Sia ora ρ la rotazione non banale di ampiezza minima α e sia n il suo periodo; allora si ha $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, e le altre rotazioni sono necessariamente sue potenze. Infatti, se un'altra rotazione θ ha ampiezza $\beta > \alpha$, posto $q = \mathrm{int}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ e $\gamma = \beta - q\alpha$, allora la rotazione $\theta \circ \left(\rho^q\right)^{-1} \in H$ ha ampiezza $0 \le \gamma = \beta - q\alpha < \alpha$, assurdo se $\gamma \ne 0$. Perciò $\gamma = 0$, $\theta = \rho^q$. Allora il sottogruppo di H costituito dalle rotazioni è ciclico, generato da r, quindi d'ordine n.

Se non esaurisce H, c'è almeno una simmetria assiale s. Allora per ogni k, 0 ≤ k ≤ n-1, il prodotto $\rho^k \circ \sigma$ non è una rotazione, ma una simmetria assiale, quindi di periodo 2. Inversamente, se $\theta \in H$ e non è una rotazione, allora $\theta°\sigma$ è una isometria diretta, ossia una rotazione ρ^k. Perciò $\theta = \rho^k \circ \sigma$. Ne segue che H ha 2n elementi e si ha:

$$\left(\rho^k \circ \sigma\right)^2 = id \Rightarrow \rho^k \circ \sigma \circ \rho^k \circ \sigma = id \Rightarrow \rho^k \circ \sigma = \sigma \circ \left(\rho^k\right)^{-1}$$

Pertanto, H è il gruppo diedrale d'ordine 2n.

ESEMPI

1. *Il gruppo di un poligono regolare con n lati*. Il gruppo di un (qualsiasi) poligono regolare con n lati (che è una figura limitata) contiene 2n elementi, cioè le rotazioni r_k di ampiezze 2pk/n, 0 ≤ k < n, con il centro nel centro O del poligono, e le n simmetrie rispetto alle rette congiungenti O con i vertici o con i punti medi dei lati. Si tratta quindi del gruppo diedrale con 2n elementi.

2. *Il gruppo del cerchio*. Sia dato un cerchio e sia O il suo centro. Le isometrie che trasformano il cerchio in sé sono tutte e sole quelle che hanno O come punto unito,

pertanto il gruppo del cerchio coincide con lo stabilizzatore G_O del suo centro, ed è costituito dalle rotazioni di centro O e dalle simmetrie il cui asse passa per O.

3. *Il gruppo della retta.* Sia r una retta e sia G_r il suo gruppo: poiché r non è una figura limitata, non è applicabile il teorema 1.14. Possiamo però determinare gli elementi di G_r mediante lo studio delle rette unite delle varie isometrie. Si ottiene così che G_r è costituito: dalle traslazioni il cui vettore è parallelo ad r; dalle rotazioni di ampiezza un angolo piatto (simmetrie centrali) il cui centro è su r; dalla simmetria di asse r e da quelle di asse perpendicolare ad r; dalle antitraslazioni di asse r.

Esercizio 1.16. Si determinino i gruppi d'isometrie di un rombo e di un rettangolo (che non siano quadrati): sono isomorfi?

Esercizio 1.17. Per ogni $n \geq 2$ si determini una figura piana il cui gruppo d'isometrie sia ciclico d'ordine n.

L'ESPRESSIONE ANALITICA DI UNA ISOMETRIA PIANA. Troviamo ora la forma analitica delle isometrie, incominciando dalle simmetrie assiali. Introduciamo nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali. Allora una retta s ha equazione $ax+by+c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. Dividendo eventualmente i tre coefficienti per a^2+b^2, possiamo supporre $a^2+b^2 = 1$.

Sia ora $P(x, h)$ un punto e sia $P'(x', h')$ il suo simmetrico rispetto alla retta s.

La retta PP' è perpendicolare ad s, per cui si ha:

$$b(h - h') - a(x - x') = 0.$$

Inoltre, il punto medio di PP' appartiene ad s, quindi si ha:

$$a \cdot \frac{x+x'}{2} + b \cdot \frac{y+y}{2} + c = 0.$$

Si ottiene così il sistema lineare $\begin{cases} bx' - ah' = bx - ah \\ ax' + bh' = -ax - bh - 2c \end{cases}$.

La sua matrice dei coefficienti ha determinante $-a^2-b^2 = -1$, per cui il sistema è determinato. Si ottiene, eseguendo i calcoli:

$$(*) \quad \begin{cases} x' = \left(b^2 - a^2\right)x - 2abh - 2ac \\ h' = -2abx - \left(b^2 - a^2\right)h - 2bc \end{cases}.$$

Siano $X' = \begin{bmatrix} x' \\ h' \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ h \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2ac \\ -2bc \end{bmatrix}$.

Allora le equazioni (*) della simmetria σ diventano, in forma matriciale:

$$X' = AX + B.$$

Detta A^t la trasposta di A, si vede subito che $A^t = A^{-1}$, cioè A è *ortogonale*.

Data ora un'altra simmetria assiale σ_1, essa si potrà rappresentare con la equazione matriciale $X' = A_1X + B_1$, dove anche A_1 è una matrice ortogonale con determinante -1. Allora la composta $\sigma_1 \circ \sigma$ avrà equazione matriciale:

$$X' = A_1(AX + B) + B_1 = (A_1A)X + (A_1B+B_1)$$

dove la matrice A_1A è ancora ortogonale (come si verifica facilmente), ma con determinante 1. Pertanto un movimento ha equazione $X' = MX + C$, dove $M = AA_1$ è ortogonale con determinante 1 e $C = (A_1B+B_1)$ è un vettore-colonna.

Poiché la matrice di σ dipende solo dai coefficienti a e b della retta e non dal termine noto c, simmetrie con assi paralleli hanno la stessa matrice A. Sappiamo che, essendo gli assi paralleli, allora $\sigma_1 \circ \sigma$ è una traslazione, ed essendo $A_1 = A$, allora $M = A^2 = I_2$, denotando con I_2 la matrice unità. Pertanto, l'equazione di una traslazione è $X' = X + C$, dove C è il corrispondente dell'origine O(0, 0) nella traslazione stessa.

Infine, componendo una simmetria con un movimento si riottiene una equazione matriciale dello stesso tipo, ma con il determinante -1.

Pertanto:

TEOREMA 1.18. Per ogni isometria f esistono una matrice ortogonale A ed un vettore-colonna B tali che f ha equazione (in forma matriciale) $X' = AX + B$. Si ha inoltre: $f \in M \Leftrightarrow \det(A) = 1$, ed $f \in T \Leftrightarrow A = I_2$.

Osservazioni. **1.** Si può anche dimostrare che, inversamente, per ogni matrice ortogonale A e per ogni vettore-colonna B la trasformazione f di equazione $X' = AX + B$ è un'isometria.

2. Data l'isometria f di equazione $X' = AX+B$, come classificarla? Abbiamo visto già che è una traslazione se e solo se $A = I_2$ ed è un movimento se e solo se $\det(A) = 1$, per cui se $A \neq I_2$ e $\det(A) = 1$ allora f è una rotazione, e viceversa.

Sia det(A) = -1: f è una simmetria assiale se e solo se ha periodo 2, quindi se e solo se f^2 = id, cioè se e solo se AB+B = O (vettore nullo). Se ciò non accade, f^2 è una traslazione non identica e quindi f è un'antitraslazione.

Vogliamo infine determinare alcune proprietà del gruppo G delle isometrie piane. Sappiamo che è un gruppo infinito, contenente il sottogruppo T delle traslazioni che è isomorfo al gruppo ($\mathbf{R}^2$, +) dei vettori del piano, per cui G non è numerabile. Sappiamo anche che non è abeliano. Si ha poi:

LEMMA 1.19. Il sottogruppo M dei movimenti ha indice 2 in G ed è pertanto un sottogruppo normale.

Dimostrazione. Sia σ una simmetria assiale fissata e sia f un'isometria inversa. Il prodotto $f \circ \sigma$ è un movimento, cioè esiste $\varphi \in M$, tale che $f \circ \sigma = \varphi$. Ma allora $f = \varphi \circ \sigma$, cioè f appartiene al laterale destro $M\sigma$. Ne segue $G \setminus M = M\sigma$, pertanto gli unici laterali destri di M in G sono M stesso ed $M\sigma$, quindi M ha indice 2.

PROPOSIZIONE 1.20. Siano T il sottogruppo delle traslazioni, O un punto del piano e G_O il suo stabilizzatore. Si ha:

a) Il sottogruppo T è normale in G.

b) Si ha $G = TG_O$, $T \cap G_O = \{id\}$, ossia G è prodotto semidiretto di T per G_O.

c) M è prodotto semidiretto di T per $(M \cap G_O)$.

Dimostrazione. a) Proviamo che T è normale in G. Poiché le simmetrie assiali generano G, basta provare che per ogni simmetria σ e per ogni traslazione τ, anche $\sigma^{-1} \circ \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau \circ \sigma$ è una traslazione. Sia s l'asse di σ e sia $\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1$, con σ_i simmetria di asse s_i, ed s_1 parallelo ad s_2.

Se anche s è parallelo ad s_1 si ha $\sigma \circ \tau \circ \sigma = (\sigma \circ \sigma_2) \circ (\sigma_1 \circ \sigma)$ prodotto di due traslazioni, quindi è una traslazione.

Se invece s non è parallela alle altre due rette, essa forma con esse angoli coniugati interni supplementari, per cui le due rotazioni $\sigma \circ \sigma_2$ e $\sigma_1 \circ \sigma$ hanno ampiezze opposte. Pertanto, per 1.9, $\sigma \circ \tau \circ \sigma = (\sigma \circ \sigma_2) \circ (\sigma_1 \circ \sigma)$ è una traslazione.

b) Sia f un'isometria e siano O' = f(O), τ la traslazione associata al vettore $\overrightarrow{OO'}$. Allora $\tau^{-1} \circ f(O) = O$, cioè $\tau^{-1} \circ f \in G_O$. Ne segue $f \circ \tau \in G_O$, quindi $G = TG_O$.

Poiché l'unica traslazione che abbia punti uniti è l'identità, si ha $T \cap G_O = \{id\}$.

c) T è ovviamente normale anche in M. Sia μ un movimento e siano $O' = \mu(O)$ e τ la traslazione associata al vettore $\overrightarrow{OO'}$. Allora $\tau^{-1} \circ \mu(O) = O$, cioè $\tau^{-1} \circ \mu \in M \cap G_O$. Ne segue $\mu \circ \tau \in M \cap G_O$, quindi $G = T(M \cap G_O)$.

PROPOSIZIONE 1.21. Il gruppo G è risolubile.

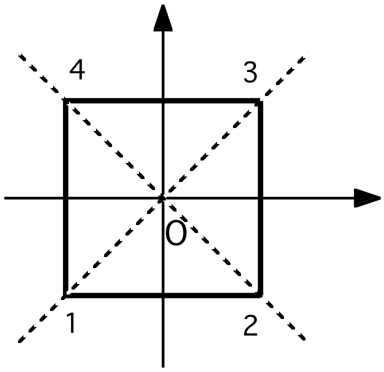
Dimostrazione. La serie $1 = \{id\} \triangleleft T \triangleleft M \triangleleft G$ è una serie normale e si ha:

- $T/1 \cong T \cong \left(\mathbf{R}^2, +\right)$, abeliano;
- $M/T \cong (M \cap G_O)$ = gruppo delle rotazioni di centro O, $\cong \left(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, +\right)$ (cfr Osservazione 1 ad 1.8), abeliano;
- G/M abeliano perché ha ordine 2.

Pertanto la serie data è abeliana e G è risolubile.

IL GRUPPO DEL QUADRATO. Numeriamo i vertici di un quadrato con 1, 2, 3, 4, in senso antiorario. Sia poi O il suo centro, cioè il punto d'incontro delle diagonali e degli assi dei lati. Sappiamo che ogni isometria del piano che trasforma in sé il nostro quadrato è determinata completamente dalla permutazione che essa induce sui vertici e che, di conseguenza, le permutazioni così ottenute costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo D_4 delle simmetrie del quadrato. Siano ρ la rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario intorno ad O, e σ la simmetria rispetto all'asse dei lati 1 4 e 2 3. Le due permutazioni ρ e σ generano D_4:

$$D_4 = \left\{id,\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ \sigma,\ \rho \circ \sigma,\ \rho^2\sigma,\ \rho^3\sigma\right\}$$

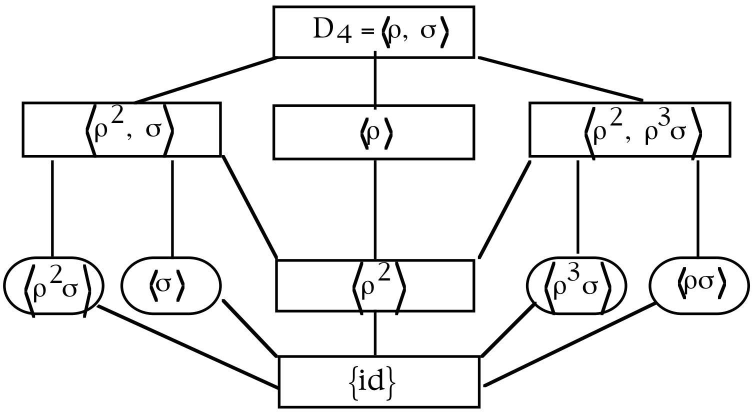


Permutaz.	isometria che la induce sui vertici
id	identità
(1 2 3 4)	rotazione di $\pi/2$ in senso ant. intorno ad O
(1 3)(2 4)	simmetria rispetto ad O
(1 4 3 2)	rot. di $3\pi/2$ in senso antior. intorno ad O
(1 4)(2 3)	simmetria rispetto all'asse dei lati 1 4 e 2 3
(1 3)	simmetria rispetto alla diagonale 2 4
(1 2)(3 4)	simmetria rispetto all'asse dei lati 1 2 e 3 4
(2 4)	simmetria rispetto alla diagonale 1 3

La tavola di moltiplicazione di D4 è calcolata con la TI-92 applicando un programma apposito. I numeri 1, ... , 8 sostituiscono gli elementi di D4 secondo l'ordine sopra riportato. Il quadrato in alto a destra è la tavola del sottogruppo $\langle\rho\rangle$ costituito dalle rotazioni.

$\circ$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	1	6	7	8	5
3	3	4	1	2	7	8	5	6
4	4	1	2	3	8	5	6	7
5	5	8	7	6	1	4	3	2
6	6	5	8	7	2	1	4	3
7	7	6	5	8	3	2	1	4
8	8	7	6	5	4	3	2	1

Ed ecco il diagramma dei sottogruppi, ordinati per inclusione:



NOTE. A) La simmetria centrale ρ^2 commuta con tutte le altre.

B) Oltre a $\langle\rho\rangle$ ci sono altri due sottogruppi d'ordine 4, non ciclici, derivanti dal fatto che il quadrato è anche un rettangolo ed un rombo.