



IL GRUPPO DEI QUATERNIONI

C'è un gruppo non abeliano di ordine 8, notevole per molti aspetti. Si denota con Q_8 e si può rappresentare con 8 matrici di ordine 2 o sul campo complesso oppure sul campo Z_3 . Sul campo reale invece richiede 8 matrici d'ordine 4. Scegliamo il campo d'ordine 3.

$$\text{Siano } a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che:

$$\mathbf{a^2 = b^2 = (a \cdot b)^2, a^4 = b^4 = \text{id}, (b \cdot a) = (a \cdot b)^3}$$

$$\text{Allora } Q_8 = \{\text{id}, a, b, a^2, ba, a^3, ab, b^3\}.$$

Per il calcolo della tavola di moltiplicazione, codifichiamo gli elementi di Q_8 così:

id	a	b	a ²	ba	a ³	ab	b ³
1	2	3	4	5	6	7	8
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Ed ecco la tavola di moltiplicazione "astratta" del gruppo Q_8 dei quaternioni.

*	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	4	7	6	3	1	8	5
3	3	5	4	8	6	7	2	1
4	4	6	8	1	7	2	5	3
5	5	8	2	7	4	3	1	6
6	6	1	5	2	8	4	3	7
7	7	3	6	5	1	8	4	2
8	8	7	1	3	2	5	6	4

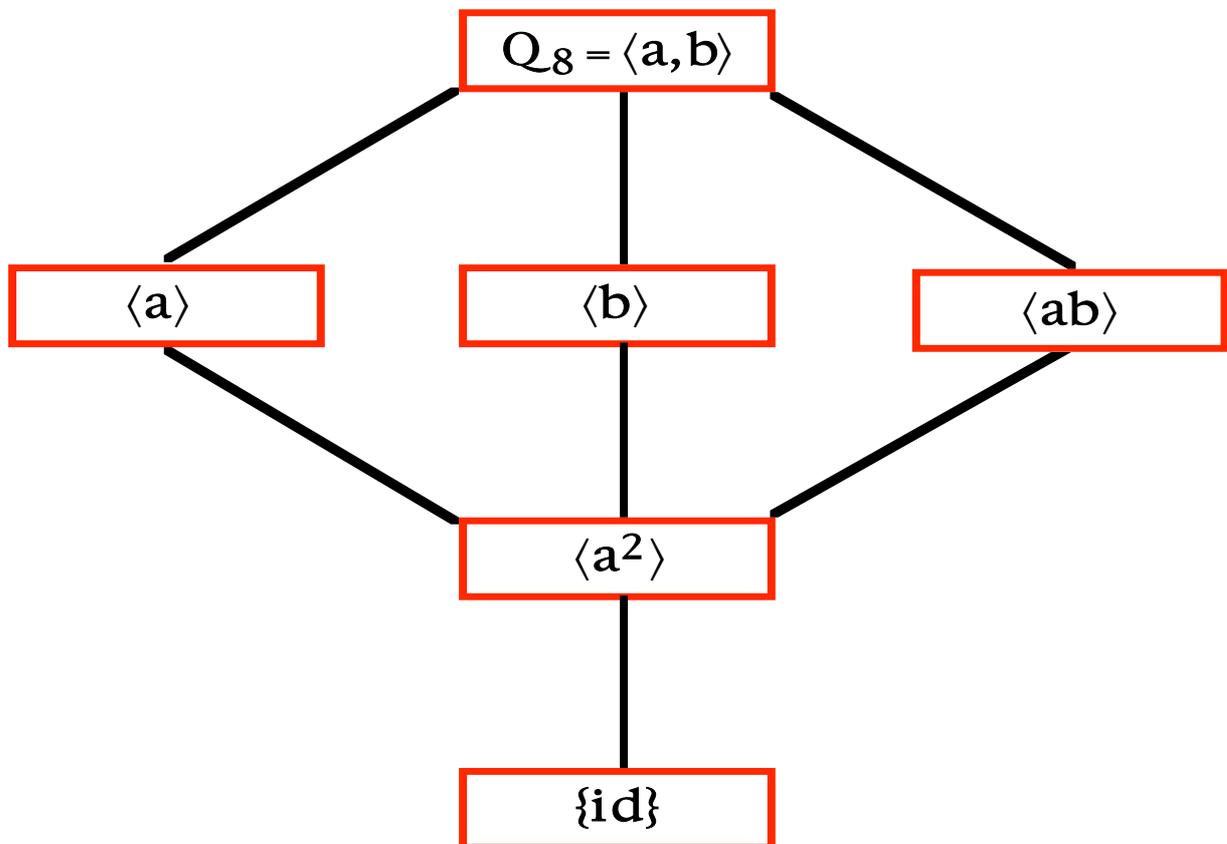
Questo gruppo ha un solo sottogruppo d'ordine 2, costituito da $\{\text{id}, a^2\}$. Ci sono poi tre sottogruppi di ordine 4, ossia:

$$\langle a \rangle = \{\text{id}, a, a^2, a^3\}, \quad \langle b \rangle = \{\text{id}, b, a^2, b^3\},$$

$$\langle ab \rangle = \{\text{id}, a^2, ba, ab\}.$$

Insieme con $\{\text{id}\}$ e l'intero gruppo, questi sono i soli sottogruppi di Q_8 , e sono tutti **normali**.

DIAGRAMMA DEI SOTTOGRUPPI DI Q_8



Gli elementi **id** e **a^2** commutano con tutti gli altri. Essi costituiscono il **centro** $Z(Q_8)$ del gruppo.

NOTA. Questo gruppo fu scoperto da G. Hamilton. E' infatti costituito dagli otto elementi usualmente denotati con $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ del **corpo dei quaternioni**.